Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Helena Balajová

Maximální nerovnosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, PhD
Studijní program: Obecná matematika

2007

Moje poďakovanie patrí RNDr. Danielovi Hlubinkovi, PhD za jeho cenné rady pri práci.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 12.7.2007 Helena Balajová

Obsah

Název práce: Maximální nerovnosti
Autor: Helena Balajová
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, PhD
e-mail vedoucího: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vybrané maximální nerovnosti. Začínáme jednoduchým případem maximální rovnosti pro symetrickou náhodnou procházku. Postupně zevšeobecňujeme Kolmogorovovy nerovnosti pro nezávislé náhodné veličiny, submartingaly, martingaly, martingalové diference. V poslední kapitole studujeme Doobovu nerovnost, která reguluje asymptotiku posloupnosti martingalů a je nevyhnutelná pro jeden z dalších odhadů Kolmogorovova typu. Zabýváme se možnou aplikací v příkladech, při vyšetřování konvergence a nebo významem maximálních nerovností jako důležitých technických pomůcek v důkazech z teorie pravděpodobnosti.

Klíčová slova: maximální nerovnosti, Kolmogorovove nerovnosti, konvergence

Title: Maximal inequalities
Author: Helena Balajová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Daniel Hlubinka, PhD
Supervisor's e-mail address: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study selected maximal inequalities. We begin with a simple case of the maximal equality for symmetric random walk. We generalize Kolmogorov‘s inequalities for independet random variables, submartingales, martingales and martingales differences. The last chapter studies Doob‘s inequality, which controls the oscillation of a martingale sequence and it is necessary for another estimation of Kolmogorov‘s type. We deal with application in examples, for example in the martingale convergence theorem, or like a necessary technical tool in important proofs from the probability theory.

Keywords: maximal inequalities, Kolmogorov‘s inequalities, convergence theorem

Kapitola 1

Úvod

Maximálne nerovnosti majú významné postavenie v teórii pravdepodobnosti. Pomocou nich vyhľadávame horné odhady pravdepodobností udalostí typu:

$$P\left[\max_{1\le k\le n} S_k \ge \epsilon\right],$$

kde záleží len na znalosti rozdelenia náhodných veličín S_n. Neustále pretrvávajú snahy o ich generalizáciu odstraňovaním obmedzujúcich predpokladov a vytváraním ostrejších odhadov, preto ich existuje pomerne veľké množstvo. Sú nevyhnutným technickým základom pre jedny z najdôležitejších dôkazov z teórie pravdepodobnosti ako je zákon veľkých čísel, či konvergencia martingálov. Majú taktiež praktické použite pri vyšetrovaní rôznych typov konvergencií a v štúdiu stochastických procesov.

V práci sme sa snažili vybrať nerovnosti pre rôzne typy náhodných veličín. Začíname na jednoduchom prípade náhodnej prechádzky. Symetria rozdelenia je predpokladom aj v jednej z Lévyho nerovností. Ďalšia kapitola sa zameriava na najznámešie Kolmogorovove nerovnosti. Odhady tohto typu v práci postupne zovšeobecňujeme. Prechádzame postupne z predpokladov nezávislosti náhodných veličín, submartingálov, martingálov a martingálových diferencií. Posledná kapitola rozoberá Doobovu nerovnosť a jej dôsledky, ktoré sa používajú pri vyšetrovaní asymptotického správania martingálov. Pomocou nej na záver odvodíme ešte jeden odhad Kolmogorovovho typu.

V práci kladieme dôraz na dôkazy, nevyhnutnosť daných predpokladov, možnosti použitia, či už v teoretickej rovine alebo v praktickej na konkrétnych príkladoch.

Kapitola 2

Diskrétna symetrická náhodná prechádzka

Náhodná prechádzka vďaka svojej jednoduchej interpretácii umožňuje riešiť zložité úlohy z teórie pravdepodobnosti, používa sa na modelovanie javov vo fyzike, či v ekonomike. Budeme sa zaoberať jej diskrétnou symetrickou verziou.

Definícia 1 *Diskrétna symetrická náhodná prechádzka predstavuje postupnosť čiastočných súčtov*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$n \in \mathcal{N}$, kde $X_1, X_2, \ldots$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny a platí, že $P[X_1 = 1] = P[X_1 = -1] = \frac{1}{2}$.

Jednoduchá a názorná predstava o symetrickej diskrétnej náhodnej prechádzke je pohyb častice po celočíselnej priamke v diskrétnom čase (na začiatku je v bode 0), kde s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ sa v každom časovom okamihu pohne o jednotku doprava alebo doľava, pričom smer pohybu v čase k nezávisí na pohyboch v prechádzajúcich $k-1$ časových okamihoch. V tomto modeli je S_n polohou v čase n. Iná veľmi častá interpretácia je hra dvoch hráčov, ktorí hádžu mincou. Jednotlivé partie sú nezávislé. Ak hráč prehrá, zaplatí súperovi 1 jednotku. Veličina S_n predstavuje výhru prvého hráča po n hodoch.

Položme častici v nejakom celočíselnom bode a bariéru, $a \geq 0$. Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť, že častica v nejakom časovom okamihu danú bariéru prekročí, teda či hráčov zisk niekedy prekročí hodnotu a. Práve túto otázku rieši nasledujúca maximálna rovnosť.

Veta 1 *Definujme náhodnú veličinu*

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$$

na postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, *nech* a *je celé číslo,* $n \geq a \geq 0$. *Potom*

$$P[M_n \geq a] = 2P[S_n > a] + P[S_n = a].$$

Dôkaz:
Rozdelením udalosti podľa polohy v čase n na tri disjunktné, dostaneme rovnosť:

$$P[M_n \geq a] = P[M_n \geq a, S_n < a] + P[M_n \geq a, S_n > a] + P[M_n \geq a, S_n = a].$$

Z princípu reflexie plynie rovnosť prvých dvoch členov

$$P[M_n \geq a, S_n < a] = P[M_n \geq a, S_n > a].$$

Kým zrejme:

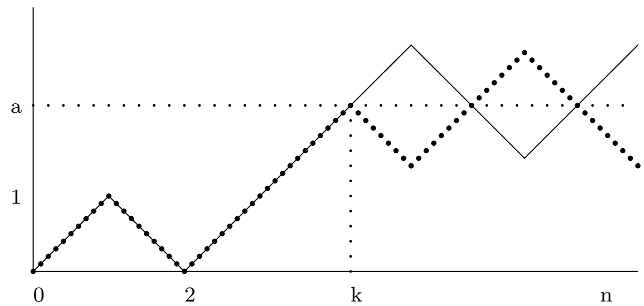
$$P[M_n \geq a, S_n > a] = P[S_n > a],$$
$$P[M_n \geq a, S_n = a] = P[S_n = a],$$

takže platí

$$P[M_n \geq a] = P[S_n > a] + P[S_n > a] + P[S_n = a] = 2P[S_n > a] + P[S_n = a].$$

Z dôkazu je zrejmé, že nutnou podmienkou je práve symetria v pravdepodobnosti pohybu častice. Jedná sa o princíp reflexie, resp. zrkadlenia, podľa ktorého pre $c, b > 0$, $n > 0$, je $P[S_n = b - c$, existuje $0 \leq k < n$ tak, že $S_k = -c] = P[Sn = b + c]$, t.j. počet ciest, ktoré spájajú body $(0, 0)$ a $(n, b - c)$ a v určitom časovom okamihu k, prejdú bodom $-c$, je rovnaký ako počet ciest spájajúcich body $(0, 0)$ a $(n, b + c)$.

V našom prípade trajektórie pohybu splývajú až do okamihu k (viď obr. 1), v nasledujúcich časových okamihoch sú si navzájom symetrické podľa osi $y = a$. Súvislá čiara predstavuje udalosť $P[M_n \geq a, S_n > a]$ a čiarkovaná udalosť $P[M_n \geq a, S_n < a]$.



Obr. 1.: princíp zrkadlenia

QED

2.1 Aplikácia

Príklad
Majme diskrétnu symetrickú náhodnú prechádzku, ktorá začína v bode 0. Určme pravdepodobnosť, že maximálna hodnota, ktorú náhodná prechádzka dĺžky n dosiahne, je práve a, t.j. $P[M_n = a]$, kde $a \geq 0$.
Použijeme maximálnu rovnosť z vety 1.:

$$\begin{aligned} P[M_n = a] &= P[M_n \geq a] - P[M_n \geq a+1] \\ &= 2P[S_n > a] + P[S_n = a] - 2P[S_n > a+1] - P[S_n = a+1] \\ &= 2P[S_n \geq a+1] + P[S_n = a] \\ &\quad -2P[S_n \geq a+2] - P[S_n = a+1]. \end{aligned}$$

Ďalej zrejme platí:

$$P[S_n \geq a+1] = P[S_n = a+1] + P[S_n \geq a+2],$$

takže

$$2P[S_n \geq a+1] - 2P[S_n \geq a+2] - P[S_n = a+1] = P[S_n = a+1].$$

Využitím predchádzajúcej rovnosti dostávame:

$$P[M_n = a] = P[S_n = a] + P[S_n = a+1],$$

pričom len jeden z výrazov je nenulový.
Zvoľme $a = 0$. Náhodná veličina S_n predstavuje polohu častice v čase n, ktorá je určená jednoznačne počtom pohybov doprava. Ak označíme počet pohybov n, počet pohybov doprava k, potom počet pohybov doľava je $n-k$, takže konečná poloha častice je $k-(n-k) = 2k-n$. Rovnosť $S_n = 0$ môže teda nastať len pre párne n. Z toho dostávame:
$P[M_n = 0] = P[S_n = 0]$ pre n párne,
$P[M_n = 0] = P[S_n = 1]$ pre n nepárne.
V modeli hry hádzania mincou tento výsledok značí, že pravdepodobnosť nulovej maximálnej hodnoty, ktorú hráč získa, sa rovná pravdepodobnosti, že bude zruinovaný, v prípade, že počet partií je párny a tiež sa to rovná pravdepodobnosti, že skončí so ziskom 1, ak je počet hier nepárny.

Maximálna rovnosť pre náhodnú prechádzku sa zrejme môže upraviť aj do tvaru:

$$P[M_n \geq a] = 2P[S_n \geq a] - P[S_n = a].$$

a pomocou limitného prechodu pre $n \to \infty$ (viď [8] str. 52 - 53) a centrálnej limitnej vety platí

$$P[M_n \geq a] \to 1.$$

Práve dokázaná vlastnosť sa často v teórii pravdepodobnosti uvádza ako tvrdenie:

Tvrdenie 1 *Častica konajúca náhodnú prechádzku vstúpi s pravdepodobnosťou 1 do každej bariéry $a \in \mathcal{Z}$, $a \neq 0$ v konečnom čase.*

Rozdelenie náhodnej veličiny $n^{-\frac{1}{2}} M_n$ je určené nasledovne: (dôkaz viď [5], str. 321)

Veta 2 *Nech $n \in \mathcal{N}$, $P[X_1 = 1] = P[X_1 = -1] = \frac{1}{2}$,*

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde $X_1, X_2, ...$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny. Potom

$$\lim_{n \to \infty} P[n^{-\frac{1}{2}} M_n \leq x] = 2\Phi(x) - 1.$$

pre $x \geq 0$, kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia N(0, 1).

Kapitola 3

Lévyho nerovnosť

Lévyho nerovnosť je podstatná hlavne z hľadiska teórie. Vyskytuje sa v literatúre v dvoch verziách. Jedna predpokladá symetriu rozdelenia nezávislých náhodných veličín, druhá je všeobecnejšia. Na začiatok si uvedieme definíciu mediánu, ktorú budeme potrebovať.

Definícia 2 *Pre reálnu náhodnú veličinu X nazveme mediánom reálne číslo $m(X)$, ak $P[X \leq m(X)] \geq \frac{1}{2} \leq P[X \geq m(X)]$.*

Veta 3 *Ak $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ sú nezávislé náhodné veličiny, $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$, $m(Y)$ je medián Y, potom pre všetky $\epsilon > 0$ platí:*

$$P\left[\max_{1\leq j\leq n}(S_j - m(S_j - S_n)) \geq \epsilon\right] \leq 2P[S_n \geq \epsilon],$$

$$P\left[\max_{1\leq j\leq n}|S_j - m(S_j - S_n)| \geq \epsilon\right] \leq 2P[|S_n| \geq \epsilon].$$

Dôkaz:
Nech $S_0 = 0$. Položme

$$\begin{aligned} T &= \min\{j \in \{1, 2, ...n\} : S_j - m(S_j - S_n) \geq \epsilon\} \\ &= n + 1 \;\; inak. \end{aligned}$$

Ak $B_j := \{m(S_j - S_n) \geq S_j - S_n\}$, kde $1 \leq j \leq n$, tak potom z definície mediánu vieme, že $P[B_j] \geq \frac{1}{2}$.

Pretože platí: $\{S_n \geq \epsilon\} \supset \bigcup_{j=1}^{n}(B_j \cap [T = j])$, $\{\omega : T = j\} \in \sigma(X_1, ..., X_j)$ a $B_j \in \sigma(X_{j+1}, ..., X_n)$, tak dostávame:

$$
\begin{aligned}
P[S_n \geq \epsilon] &\geq \sum_{j=1}^{n} P[B_j, T = j] && (3.1)\\
&= \sum_{j=1}^{n} P[B_j] P[T = j] && (3.2)\\
&\geq \frac{1}{2} P[1 \leq T \leq n]. && (3.3)
\end{aligned}
$$

Rovnosť 3.2 plynie z nezávislosti.
Ak X_j nahradíme $-X_j$ a využijeme vlastnosť mediánu: $m(-Y) = -m(Y)$, tak priamo dostávame druhú nerovnosť vety.

QED

Druhá verzia Lévyho nerovnosti pre symetricky rozdelené náhodné veličiny je dôsledkom predchádzajúcej, pretože náhodné veličiny s takýmto rozdelením majú nulový medián.

Definícia 3 *Náhodná veličina X má symetriké rozdelenie, ak platí $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$.*

Veta 4 *Nech X_1, X_2 . . . X_n, $n \in \mathcal{N}$ sú nezávislé náhodné veličiny so symetrickým rozdelením, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, potom pre $\forall \epsilon > 0$*

$$P\left[\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq \epsilon\right] \leq 2P[S_n \geq \epsilon],$$

$$P\left[\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \epsilon\right] \leq 2P[|S_n| \geq \epsilon].$$

Dôkaz:
Položme

$$
\begin{aligned}
T &= \min\{k \in \{1, 2, ...n\} : S_k \geq \epsilon\},\\
&= 0 \quad inak.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}P\Big[\max_{1\le k\le n} S_k \ge \epsilon\Big] &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P[T=k] && (3.4)\\
&\le \sum_{k=1}^{n} P[T=k]P[S_n - S_k \ge 0] && (3.5)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P[T=k, S_n - S_k \ge 0] && (3.6)\\
&\le \sum_{k=1}^{n} P[T=k, S_n \ge \epsilon] && (3.7)\\
&\le P[S_n \ge \epsilon]. && (3.8)
\end{aligned}
$$

Keďže máme symetrické rozdelenie, tak $P[X \ge 0] = P[X \le 0] \ge \frac{1}{2}$. Nerovnosť 3.5 plynie teda z faktu, že pracujeme s nulovým mediánom. Predpoklad nezávislosti sme využili v rovnosti 3.6.

QED

3.1 Aplikácia

Príklad

Nech X_1, X_2,...,X_n, $n \in \mathcal{N}$ sú nezávislé náhodné veličiny so symetrickým rozdelením. Ukážeme, že pomocou Lévyho nerovnosti (veta 4) je možné odvodiť maximálnu nerovnosť aj pre náhodnú veličinu $|X_j|$, $\epsilon > 0$:

$$P\Big[\max_{j\le n} |X_j| > 2\epsilon\Big] \le 2P[|S_n| > \epsilon].$$

Vyjadríme si X_j ako rozdiel súčtov:

$$|X_j| = |S_j - S_{j-1}| \le |S_j| + |S_{j-1}|.$$

Platí

$$\max_{j\le n} |X_j| \le 2\max_{j\le n} |S_j|.$$

A pomocou Lévyho nerovnosti už dostávame požadovanú nerovnosť.

V úvode kapitoly sme už podotkli, že táto nerovnosť sa aplikuje predovšetkým v teórii, napríklad v teórii konvergencie. Vieme, že konvergencia skoro iste je silnejšia ako konvergencia v pravdepodobnosti. Napriek tomu, v špeciálnom prípade súčtov nezávislých náhodných veličín S_n, sú tieto dve ekvivalentné. Základom je Lévyho nerovnosť (veta 3), podrobný dôkaz viď [1], str. 72.

Veta 5 *Ak* $\{X_n, n \geq 1\}$ *je postupnosť nezávislých náhodných veličín, potom* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *konverguje skoro iste vtedy a len vtedy, ak konverguje v pravdepodobnosti.*

Ďalšia podmienka, ktorá určuje konvergenciu sumy nezávislých náhodných veličín je v nasledujúcej kapitole.

Na záver si odvodíme ešte jednu maximálnu nerovnosť, ktorá plynie z Lévyho nerovnosti a využíva sa v dôkaze Kolmogorovovho zákona iterovaného logaritmu (viď [6] str. 140).

Dôsledok 1 *Nech* $X_1, ..., X_n$ *sú nezávislé náhodné veličiny s konečným druhým momentom,* $EX_k = 0$ *pre* $1 \leq k \leq n$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, *potom platí*

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \epsilon\right] \leq 2P\left[S_n \geq \epsilon - \sqrt{2\mathrm{var} S_n}\right].$$

Dôkaz:
Pokiaľ je X náhodná veličina s konečným druhým momentom, tak potom pomocou Čebyševovej nerovnosti pre $\delta > 0$ dostaneme:

$$P\left[|X - EX| \leq \sqrt{(2+\delta)\mathrm{var} X}\right] \geq 1 - (2+\delta)^{-1} > \frac{1}{2}.$$

Ďalej

$$P\left[X \geq EX - \sqrt{(2+\delta)\mathrm{var} X}\right] > \frac{1}{2},$$
$$P\left[X \leq EX + \sqrt{(2+\delta)\mathrm{var} X}\right] > \frac{1}{2}$$

a z definície mediánu (definícia 2) plynie:

$$EX - \sqrt{(2+\delta)\mathrm{var} X} \leq m(X) \leq EX + \sqrt{(2+\delta)\mathrm{var} X}$$

a môžeme to jednoducho zapísať (pretože $\delta > 0$ bola ľubovoľná) ako

$$|m(X) - EX| \leq \sqrt{2\mathrm{var} X}.$$

Predchádzajúcu nerovnosť aplikujeme na $(S_k - S_n)$:

$$|m(S_k - S_n)| \leq \sqrt{2\text{var}(S_k - S_n)} \leq \sqrt{2\text{var}S_n}.$$

Pomocou Lévyho nerovnosti (veta 3) dostávame požadovanú nerovnosť:

$$\begin{aligned}
P\left[\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \epsilon\right] &= P(\cup_{k=1}^n[S_k \geq \epsilon]) \\
&\leq P\left[\cup_{k=1}^n[S_k - m(S_k - S_n) \geq \epsilon - \sqrt{2\text{var}S_n}]\right] \\
&= P\left[\max_{1\leq k\leq n}(S_k - m(S_k - S_n) \geq \epsilon - \sqrt{2\text{var}S_n})\right] \\
&\leq 2P\left[S_n \geq \epsilon - \sqrt{2\text{var}S_n}\right].
\end{aligned}$$

QED

Kapitola 4

Kolmogorovove nerovnosti

4.1 1.Kolmogorovova nerovnosť

1. Kolmogorovova nerovnosť je základným krokom, pokiaľ chceme vyšetriť podmienky, za akých konverguje suma nezávislých náhodných veličín

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

s pravdepodobnosťou 1. Nerovnosť rieši problém odhadu $\max_{n \leq N} |S_n|$. V odhade je dôležitá závislosť na rozptyle S_N a nie na počte sčítancov. Predstavuje zovšeobecnenie Čebyševovej nerovnosti:

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{var} X}{\epsilon^2},$$

kde $X \in \mathcal{L}_2$, $\epsilon > 0$.
Pokiaľ uvažujeme nezávislé náhodné veličiny X_1, X_2 ... X_N, $X_j \in \mathcal{L}_2$, pre $j \in \mathcal{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k)$, $\epsilon > 0$, tak potom Čebyševova nerovnosť nám dáva tieto hranice pre S_n:

$$P[|S_n| \geq \epsilon] \leq \frac{\mathrm{var} S_n}{\epsilon^2} \leq \frac{\mathrm{var} S_N}{\epsilon^2},$$

pretože $\mathrm{var} S_N \geq \mathrm{var} S_n$ pre $\forall\ 1 \leq n \leq N$ a prechodom na maximálnu nerovnosť nič nestratíme.

Veta 6 *Nech X_1, X_2 . . . X_N sú nezávislé náhodné veličiny, $X_j \in \mathcal{L}_2$, pre $j \in \mathcal{N}$, potom pre $\epsilon > 0$ je*

$$P\left[\max_{n \leq N} |S_n| > \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{var} X_k \quad (= \frac{1}{\epsilon^2}\ \mathrm{var} S_N),$$

kde $S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - EX_k)$.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} T &= \min \{n \leq N : |S_n| > \epsilon\}, \\ &= 0 \ inak. \end{aligned}$$

Potom

$$P\left[\max_{n \leq N} |S_n| > \epsilon\right] = P[T \leq N] = \sum_{n=1}^{N} P[T = n].$$

$$\begin{aligned} P[T = n] &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E S_n^2 I_{[T=n]} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} (E S_n^2 I_{[T=n]} + E(S_N - S_n)^2 I_{[T=n]}) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} E S_N^2 I_{[T=n]}. \end{aligned}$$

$S_n I_{[T=n]}$ závisi na veličinách do n a $S_N - S_n$ závisi na veličinách od $n+1$, a preto sú nezávislé, z čoho plynie rovnosť $E S_n I_{[T=n]} (S_N - S_n) = 0$.
Takže

$$\sum_{n=1}^{N} P[T = n] \leq \frac{1}{\epsilon^2} E S_N^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{var} X_k.$$

QED

4.1.1 Aplikácia

Ukážeme si, ako je možné vyšetriť konvergenciu skoro iste pomocou práve dokázanej nerovnosti.
Príklad
Nech $X_1, X_2, ...$ sú nezávislé náhodné veličiny, pre ktoré platí $\sum_n \frac{\mathrm{var} X_n}{n^2} < \infty$.
Dokážeme, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - EX_i}{i} \xrightarrow{s.i.} Y,$$

pre $n \to \infty$, kde Y je konečná náhodná veličina.
Položme $Z_i = \frac{X_i - EX_i}{i}$. 1.Kolmogorovu nerovnosť (veta 6) aplikujeme na postupnosť Z_i, pričom S_n opäť značí súčet $Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$ a $\epsilon > 0$:

$$P\Big[\max_{m \leq n \leq r} |S_n - S_m| > \epsilon\Big] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=m+1}^{r} \mathrm{var} Z_n.$$

Limitným prechodom pre $r \to \infty$ dostávame:

$$P\Big[\sup_{m \leq n} |S_n - S_m| > \epsilon\Big] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\mathrm{var} X_n}{n^2}.$$

Limitným prechodom pre $m \to \infty$ dostávame:

$$P\Big[\lim_{m \to \infty} \sup_{m \leq n} |S_n - S_m| \leq \epsilon\Big] = 1,$$

pre všetky $\epsilon > 0$.
Takže S_n je cauchyovská skoro iste, a teda konvergentá skoro iste.

V teoretickej rovine môžeme teda pomocou 1. Kolmogorovovej nerovnosti overiť postačujúcu podmienku pre konvergenciu skoro iste radu nezávislých náhodných veličín s nulovou strednou hodnotou. Dôkaz viď [5] str. 248.

Veta 7 *Ak sú $X_n \in \mathcal{L}_2$, $n \in \mathcal{N}$ nezávislé náhodné veličiny také, že*

$$\sum_{1}^{\infty} \mathrm{var} X_n < \infty,$$

potom rad $\sum_1^\infty (X_n - EX_n)$ konverguje skoro iste.

Táto veta spolu s Kroneckerovou lemou (viď [5] str. 258) sú postačujúcou podmienkou pre konvergenciu zovšeobecnených aritmetických priemerov, t.j $b_n^{-1} S_n$, kde $S_n = \sum_1^n X_k$ a $b_n > 0$ sú reálne čísla, pre ktoré platí $b_n \nearrow \infty$. Kolmogorovova nerovnosť predstavuje teda základný prostriedok pre dôkaz silného zákona veľkých čísel pre nezávislé náhodné veličiny:

Veta 8 *Nech $X_n \in \mathcal{L}_2(P)$, $n \in \mathcal{N}$ sú nezávislé náhodné veličiny, $b_n > 0$ sú reálne čísla, pre ktoré platí $b_n \nearrow \infty$. Nech $\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathrm{var} X_k}{b_k^2} < \infty$. Potom $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k) \to 0$ skoro iste pri $n \to \infty$.*

Dôkaz tejto vety je možné nájsť v [5] str. 252.

4.2 2. a 3.Kolmogorovova nerovnosť

Doteraz sme sa zaoberali nerovnosťami pre nezávislé náhodné veličiny. V tejto časti už prejdeme k teórii martingálov, ktorá má dôležité uplatnenie v štúdiu stochastických procesov. Na začiatok si uvedieme niektoré dôležité definície, ktoré budeme potrebovať.

Definícia 4 *Nech* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor a* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ *neklesajúca postupnosť pod* σ*-algebier* $\mathcal{A}$*. Potom postupnosť náhodných veličín* S_n *tvorí:*
1. martingál (s filtráciou $\mathcal{F}_n$*), ak*

$$S_n \in \mathcal{L}_1(\mathcal{F}_n) \text{ a } E[S_n|\mathcal{F}_k] = S_k \text{ s.i pre } k \leq n \text{ a } n \in \mathcal{N},$$

2. submartingál (s filtráciou $\mathcal{F}_n$*), ak*

$$S_n \in \mathcal{L}_1(\mathcal{F}_n) \text{ a } E[S_n|\mathcal{F}_k] \geq S_k \text{ s.i pre } k \leq n \text{ a } n \in \mathcal{N},$$

3. supermartingál (s filtráciou $\mathcal{F}_n$*), ak*

$$S_n \in \mathcal{L}_1(\mathcal{F}_n) \text{ a } E[S_n|\mathcal{F}_k] \leq S_k \text{ s.i pre } k \leq n \text{ a } n \in \mathcal{N},$$

Definícia 5 *Nech* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$ *je filtrácia, potom funkcia* $\tau : \Omega \to \mathcal{N}$ *je markovský čas vzhľadom k filtrácii* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$*, ak* $[\tau \leq n] \in \mathcal{F}_n$ *pre každé* $n \in \mathcal{N}$*.*

Definícia 6 *Postupnosť* $\{X_n\} \subset \mathcal{L}_1$ *sa nazýva postupnosť martingálových diferencií, keď*

$$E[X_n|X_1, ..., X_{n-1}] = 0,$$

pre $n \in \mathcal{N}$*, kde* $X_0 = 0$*.*

Martingály zovšeobecňujú teóriu súčtov nezávislých náhodných veličín. Nech $X_1, X_2, \ldots$ sú nezávislé integrovateľné náhodné veličiny s $EX_n = 0$ pre $n \geq 1$. Ak si definujeme $S_0 := 0$ a $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, tak potom postupnosť $\{S_n, n \in \mathcal{N}_0\}$ je martingál.

Pre jednoduchosť si môžeme martingál M_n predstavovať ako majetok hráča v spravodlivej hre v čase n. Za $\mathcal{F}_n$ berieme všetky možné výsledky hry do času n, $\mathcal{F}_n = \sigma(M_1, ..., M_n)$. Podmienka $E[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] = 0$ je tvrdenie, že hra nezávisí na minulosti.

1. Kolmogorovova nerovnosť predpokladala nezávislosť náhodných veličín. Zoslabením tohto predpokladu na postupnosť submartingálov dostávame 2. Kolmogorovovu nerovnosť, ktorá v literatúre vystupuje aj ako Doobova submartingálová nerovnosť.

Veta 9 *Nech* $(S_k, k \in \{1, 2...n\})$ *je submartingál, potom*

$$P\Big[\max_{1\le k\le n} S_k \ge \epsilon\Big] \le \epsilon^{-1} ES_n^+, \quad n \in N, \epsilon > 0.$$

Dôkaz:
Položme $T = \min\{k \in \{1, 2, ...n\} : S_k \ge \epsilon\}$. T je prvý výstup z množiny $(-\infty, \epsilon)$, a teda je markovským časom.
Potom

$$\Big[\max_{1\le k\le n} S_k \ge \epsilon\Big] = [T \le n] = [S_T \ge \epsilon],$$

a preto platí

$$\begin{aligned}
P[S_T \ge \epsilon] &\le \epsilon^{-1} \int_{[S_T\ge\epsilon]} S_T dP \\
&= \epsilon^{-1} \int_{[T=n]} S_n dP + \epsilon^{-1} \int_{[T\le n-1]} S_{\min\{T,n\}} dP \\
&\le \epsilon^{-1} \int_{[T\le n]} S_n dP \\
&\le \epsilon^{-1} ES_n^+.
\end{aligned}$$

Jedine v predposlednej nerovnosti využívame fakt, že pracujeme so submartingálom a že T je markovský čas.

$$E[S_n|\mathcal{F}_{\min\{T,n\}}] \ge S_{\min\{T,n\}},$$

$$[T \le n-1] \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

S_k^+ je submartingál vďaka Jensenovej nerovnosti.

QED

Znenie vety je možné modifikovať aj pre martingál, stačí potom brať absolútnu hodnotu $|S_n|$, a pretože $|x|$ je konvexná funkcia, tak potom $|S_n|$ je opäť vďaka Jensenovej nerovnosti submartingál. Takže by sme mali nasledujúcu alternatívu predchádzajúcej vety:

$$P\Big[\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \epsilon\Big] \le \frac{E|S_n|}{\epsilon}. \tag{4.1}$$

Ďalšia možná implikácia tejto jednoduchej nerovnosti pre martingál je pre $p > 1$ (dôkaz viď [3] str. 23):

$$E\Big[\max_{1\le k\le n} |S_k|^p\Big] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|S_n|^p].$$

Priamo z 2.Kolmogorovovej nerovnosti môžeme odvodiť 3.:

Veta 10 *Nech* $(S_k, k \in \{1, 2...n\})$ *je martingál, pre ktorý platí, že* $S_k \in \mathcal{L}_r$ *pre* $k, r \in \mathcal{N}$*. Nech* $\epsilon > 0$*,* $n \in \mathcal{N}$*, potom*

$$P\left[\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \epsilon\right] \le \epsilon^{-r} E|S_n|^r.$$

Dôkaz:
Platí, že ak S_k je martingál a $g : R \to R$ je konvexná funkcia, $g(S_k) \in L_1$, tak potom $g(S_k)$ je submartingál, a teda $|S_k|^r$ je tiež submartingál.
Dôkaz teda plynie z 2. Kolmogorovovej nerovnosti.

$$\begin{aligned} P\left[\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \epsilon\right] &= P\left[\max_{1\le k\le n} |S_k|^r \ge \epsilon^r\right] \\ &\le \epsilon^{-r} E|S_n|^r. \end{aligned}$$

QED

4.2.1 Aplikácia

Príklad
Nech Y_n je martingál, $EY_n = 0$ a $EY_n^2 < +\infty$ pre $\forall n \in \mathcal{N}$. Ukážeme, že pre $\epsilon > 0$ platí

$$P\left[\max_{1\le k\le n} Y_k > \epsilon\right] \le \frac{EY_n^2}{EY_n^2 + \epsilon^2}.$$

Pre $\epsilon, c > 0$ platí

$$P\left[\max_{1\le k\le n} Y_k > \epsilon\right] \le P\left[\max_{1\le k\le n} (Y_k + c)^2 > (\epsilon + c)^2\right].$$

Funkcia $(Y_k + c)^2$ je konvexná, a preto definuje submartingál. Aplikujeme 2. Kolmogorovovu nerovnosť (veta 9) a položíme $c := \frac{EY_n^2}{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} P\left[\max_{1\le k\le n} (Y_k + c)^2 > (\epsilon + c)^2\right] &\le \frac{E[Y_n + c]^2}{(\epsilon + c)^2} \\ &= \frac{EY_n^2 + c^2}{\epsilon^2 + 2c\epsilon + c^2} \\ &= \frac{EY_n^2}{\epsilon^2 + EY_n^2}. \end{aligned}$$

Príklad
Nech $\{S_n\}$ je náhodná prechádzka, $S_0 = 0$ a $0 < p = P[S_1 = 1] < \frac{1}{2}$. Dokážeme, že platí

$$E\left[\sup_m S_m\right] \leq \frac{p}{1-2p}.$$

Definujeme si $Z_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$, kde $q = 1-p$. Najprv overíme, že Z_n je martingál:

$$\begin{aligned} E[Z_n|Z_{n-1}, ...Z_0] &= E\left[Z_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} | Z_{n-1}, ...Z_0\right] \\ &= Z_{n-1}E\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} \\ &= Z_{n-1}. \end{aligned}$$

Pomocou matematickej indukcie sa dá dokázať, že pre martingál Y platí: $EY_n = EY_0$ pre všetky $n \in \mathcal{N}$. V našom prípade platí, že $Z_n \geq 0$ a

$$EZ_0 = E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_0}\right] = 1.$$

Aplikujeme nerovnosť 4.1, $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left[\max_{0\leq m\leq n} S_m \geq \epsilon\right] &= P\left[\max_{0\leq m\leq n} Z_m \geq \left(\frac{q}{p}\right)^{\epsilon}\right] \\ &\leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\epsilon} E[Z_0] \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^{\epsilon}. \end{aligned}$$

Pomocou limitného prechodu $n \to \infty$ overíme, že

$$E\left[\sup_m S_m\right] = \sum_{\epsilon=1}^{\infty} P\left[\sup_m S_m \geq \epsilon\right] \leq \frac{p}{q-p}.$$

2.Kolmogorovova nerovnosť sa v teórii pravdepodobnosti používa v jednom z dôkazov špeciálneho prípadu zákona iterovaného logaritmu pre nezávislé náhodné veličiny, ktoré majú normálne rozdelenie $\sim$ N(0,1) (viď [7] str. 139).

Pomocou 3.Kolmgorovovej nerovnosti môžeme jednoducho dokázať 1. Kolmogorovovu nerovnosť, pretože $S_k = \sum_{j=1}^{k}(X_j - EX_j)$ je martingál a berieme $r = 2$. Takže máme:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \epsilon\right] \leq \epsilon^{-2} ES_n^2 = \epsilon^{-2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var} X_j.$$

Týmto sme uzavreli "reťazec" zovšeobecňovania 3 základných Kolmogorovových nerovností.

Kapitola 5

Hájkova-Rényiho nerovnosť

V tejto kapitole sa zameriame na odhad podobný Kolmogorovovmu. Prejdeme k všeobecnejšiemu typu $P[\max_{1\leq i\leq n} a_i S_i]$, kde a_i je nerastúca postupnosť kladných čísel.

5.1 Chowova nerovnosť

Chowova nerovnosť zosilňuje Kolmogorovove nerovnosti a má relevantné postavenie či už v dôkaze Hájkovej-Rényiho vety alebo v dôkaze zákona veľkých čísel pre submartingály.

Veta 11 *Nech S_n je submartingál s filtráciou $\mathcal{F}_n$, a_n nerastúca postupnosť kladných čísel, $\epsilon > 0$, potom*

$$\epsilon P\Big[\max_{1\leq i\leq n} a_i S_i \geq \epsilon\Big] \leq a_1 E S_1^+ + \sum_{i=2}^{n} a_i E(S_i^+ - S_{i-1}^+) - a_n \int_{[\max_{1\leq i\leq n} a_i S_i < \epsilon]} S_n^+ dP.$$

Dôkaz:
Nech $n \in \mathcal{N}$, označme:

$$A_i = [a_j S_j < \epsilon; j \leq i, 1 \leq i; a_i S_i \geq \epsilon],\ A = \bigcup_i^n A_i.$$

Potom platí:

$$\begin{aligned}\epsilon P\Big[\max_{1\leq i\leq n} a_i S_i \geq \epsilon\Big] &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon P[A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{A_i} S_i^+ dP \\ &= a_1 E S_1^+ - a_1 \int_{A_1{}^c} S_1^+ dP + \sum_{i=2}^{n} a_i \int_{A_i} S_i^+ dP.\end{aligned}$$

Pretože podľa predpokladu je a_n nerastúca postupnosť a S_n^+ je submartingál, tak platí:

$$a_1 \geq a_2,$$
$$\int_{A_1} (S_2^+ - S_1^+) dP \geq 0,$$
$$A_2 = A_1^c - (A_1 \cup A_2)^c,$$

potom:

$$-a_1 \int_{A_1{}^c} S_1^+ dP + a_2 \int_{A_2} S_2^+ dP \leq a_2 E(S_2^+ - S_1^+) - a_2 \int_{(A_1 \cup A_2)^c} S_2^+ dP.$$

Dosadením do pôvodného výrazu dostávame pomocou matematickej indukcie požadovanú nerovnosť:

$$\begin{aligned}
P\Big[\max_{1\leq i\leq n} a_i S_i \geq \epsilon\Big] &\leq a_1 ES_1^+ + a_2 E(S_2^+ - S_1^+) - \\
&\quad a_2 \int_{(A_1\cup A_2)^c} S_2^+ dP + a_3 \int_{A_3} S_3^+ dP + \sum_{i=4}^{n} a_i \int_{A_i} S_i^+ dP \\
&\leq a_1 ES_1^+ + a_2 E(S_2^+ - S_1^+) + a_3 E(S_3^+ - S_2^+) - \\
&\quad a_3 \int_{(A_1\cup A_2\cup A_3)^c} S_3^+ dP + \sum_{i=4}^{n} a_i \int_{A_i} S_i^+ dP \\
&\leq \ldots \\
&\leq a_1 ES_1^+ + \sum_{i=2}^{n} a_i E(S_i^+ - S_{i-1}^+) - a_n \int_{A^c} S_n^+ dP.
\end{aligned}$$

QED

5.1.1 Aplikácia

Práve dokázaná nerovnosť je podstatná v dôkaze Silného zákona veľkých čísel pre submartingály.

Veta 12 *(Silný zákon veľkých čísel pre submartingály)*
Nech S_n je nezáporný submartingál, $S_n \in \mathcal{L}_r$ $(r \geq 1)$ a $0 < b_n \uparrow +\infty$. Potom

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^{-r} E(S_n^r - S_{n-1}^r) < \infty \Rightarrow b_n^{-1} S_n \to 0 \textit{ skoro iste.}$$

V dôkaze sa nerovnosť aplikuje na submartingál S_m^r, S_{m+1}^r, $...S_k^r$, $(k > m)$, podrobne viď [5] str. 368. Za dôsledok tejto vety sa považuje:

Veta 13 *(Zákon veľkých čísel pre martingálove diferencie)*
Nech $\{X_n\} \subset \mathcal{L}_2$ *je postupnosť martingálových diferencíí a* $0 < b_n \uparrow \infty$ *postupnosť reálnych čísel taká, že*

$$\sum_1^\infty \frac{\mathrm{var} X_n}{b_n^2} < \infty.$$

Potom

$$\frac{\sum_1^n X_j}{b_n} \to 0 \textit{ skoro iste pri } n \to \infty.$$

Dôkaz viď [5] str. 363.

5.2 Hájkova-Rényiho nerovnosť

Zovšeobecnením Kolmogorovovej nerovnosti je aj nasledujúca nerovnosť, v ktorej bude predpokladom už len postupnosť martingálových diferencií, pre ktoré z definície (definícia 6) platí

$$E[X_n|X_1, ..., X_{n-1}] = 0.$$

Pokiaľ máme postupnosť martingálových diferencií, tak ich súčet je martingál:

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i,$$

$$E[S_n|S_{n-1}, ..., S_1] = E[S_{n-1} + X_n|S_{n-1}, ..., S_1] = S_{n-1}.$$

Martingálové diferencie Y_n predstavujú dôležité zovšeobecnenie. Vieme ich vytvoriť z každej postupnosti integrovateľných náhodných veličín. Stačí, keď položíme $Y_n = X_n - E[X_n|X_1, ..., X_{n-1}]$ pre $n \in \mathcal{N}$ a $X_0 = 0$.

Veta 14 *Nech* $X_1, X_2 \ldots$*je postupnosť martingálových diferencií* $X_n \in L_2$, $n \in N$, a_n *nerastúca postupnosť kladných čísel,* $\epsilon > 0$, *potom platí*

$$P\Big[\max_{1\le i\le n} a_i|S_i| \ge \epsilon\Big] \le \epsilon^{-2} \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{var} X_i, \qquad S_n = \sum_1^n X_j.$$

Dôkaz:
Pracujeme s postupnosťou martingálových diferencií, takže S_n je martingál a S_n^2 je teda submartingál. Platí

$$E(S_j^2 - S_{j-1}^2) = EX_j^2 = \mathrm{var} X_j.$$

A tvrdenie vety už plynie priamo z Chowovej nerovnosti (veta 11), ktorú sme dokázali v predchádzajúcej časti.

QED

5.3 Zovšeobecnenie

V tejto časti postupne odstránime predpoklady týkajúce sa momentov aj nezávislosti z odhadov typu $P[\max_{1\le k\le n} S_k]$ a typu $P[\max_{1\le k\le n} a_k S_k]$.

Lema 1 *Nech $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, kde X_1, X_2... je postupnosť náhodných veličín, potom pre všetky $\epsilon > 0$ platí:*

$$P\Big[\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge 2\epsilon\Big] \le 2\left(\sum_{k=1}^n E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_k|^r}{\epsilon^r + |X_k|^r}\right]\right)^s,$$

kde $s = 1$, ak $0 < r \le 1$ a $s = r$, ak $1 \le r$.

Dôkaz:
Budeme používať nasledujúce značenie

$$\begin{aligned} X_k^* &= X_k I_{[|X_k|<\epsilon]}, \\ X_k^{**} &= X_k I_{[|X_k|\ge\epsilon]}, \\ S_k^* &= \sum_{j=1}^k X_j^*, \\ S_k^{**} &= \sum_{j=1}^k X_j^{**}. \end{aligned}$$

Potom zrejme

$$\begin{aligned} X_k &= X_k^* + X_k^{**}, \\ S_k &= S_k^* + S_k^{**}. \end{aligned}$$

Udalosť si teda rozdelíme na dve disjunktné:

$$P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge 2\epsilon\right]\le P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k^*|\ge \epsilon\right]+P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k^{**}|\ge \epsilon\right].$$

Pomocou nerovnosti Kouniasa a Wenga (viď [2]) dostávame:

$$P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k^*|\ge \epsilon\right]\le \left(\sum_{k=1}^{n} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_k^*|^r}{\epsilon^r}\right]\right)^s.$$

a keďže platí nerovnosť:

$$\frac{E|X_k^*|^r}{\epsilon^r}\le 2E\left[\frac{|X_k^*|^r}{\epsilon^r+|X_k^*|^r}\right],$$

tak potom máme

$$P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k^*|\ge \epsilon\right]\le 2\left(\sum_{k=1}^{n} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_k|^r}{\epsilon^r+|X_k|^r}\right]I_{[|X_k|<\epsilon]}\right)^s.$$

Teraz určíme hranice pre druhú udalosť:

$$\begin{aligned}
P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k^{**}|\ge \epsilon\right] &\le \sum_{k=1}^{n} P[|X_k|\ge\epsilon]\\
&\le 2\sum_{k=1}^{n} E\left[\frac{|X_k|^r}{\epsilon^r+|X_k|^r}\right]I_{[|X_k|\ge\epsilon]}\\
&\le 2\left(\sum_{k=1}^{n} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_k|^r}{\epsilon^r+|X_k|^r}\right]I_{[|X_k|\ge\epsilon]}\right)^s.
\end{aligned}$$

Využitím nerovnosti:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{s}}\right)^s+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{s}}\right)^s\le\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{1}{s}}\right)^s,$$

kde a_k, b_k sú kladné konštanty a $s\ge 1$ dostávame tvrdenie lemy.

QED

Lema 2 *Ak* $\{X_k, k \geq 1)$*je postupnosť náhodných veličín a* $\{c_k, k \geq 1)$ *je nerastúca postupnosť kladných čísel, potom pre každé celé kladné číslo* m*,* n*, kde* $m < n$ *a každé* $\epsilon > 0$ *platí:*

$$\begin{aligned} P\Big[\max_{m\leq k\leq n} c_k|S_k| \geq 3\epsilon\Big] &\leq 2\Bigg(\sum_{i=1}^{m} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_m\epsilon)^r + |X_i|^r}\right] + \\ &\sum_{i=m+1}^{n} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_i\epsilon)^r + |X_i|^r}\right]\Bigg)^s, \end{aligned}$$

kde $s = 1$*, ak* $0 < r \leq 1$ *a* $s = r$*, ak* $r \geq 1$ *a* $b_i = \frac{1}{c_i}$.

Dôkaz:
Položme rovnako ako v predchádzajúcom dôkaze

$$X_i^* = X_i I_{[|X_i|<b_i\epsilon]},$$

$$X_i^{**} = X_i I_{[|X_i|\geq b_i\epsilon]},$$

$$S_k^* = \sum_{i=1}^{k} X_i^*,$$

$$S_k^{**} = \sum_{i=1}^{k} X_i^{**}$$

a pre zjednodušenie

$$Y_i^r = \frac{|X_i|^r}{(b_i\epsilon)^r + |X_i|^r}.$$

Potom

$$\begin{aligned} X_k &= X_k^* + X_k^{**}, \\ S_k &= S_k^* + S_k^{**}. \end{aligned}$$

Opäť použijeme nerovnosť Kouniasa a Wenga (viď [2]) a nerovnosť:

$$\epsilon^{-r} c_i^r E|X_i^*|^r \leq 2EY_i^r I_{[|X_i|<b_i\epsilon]}.$$

A dostávame

$$\begin{aligned} P\Big[\max_{m\leq k\leq n} c_k|S_k^*| \geq \epsilon\Big] &\leq 2\Bigg(c_m^{\frac{r}{s}} \sum_{i=1}^{m} b_i^{\frac{r}{s}} E^{\frac{1}{s}} Y_i^r I_{[|X_i|<b_i\epsilon]} \\ &+ \sum_{i=m+1}^{n} E^{\frac{1}{s}} Y_i^r I_{[|X_i|<b_i\epsilon]}\Bigg)^s, \end{aligned}$$

kde $s=1$, ak $0<r\leq 1$ a $s=r$, ak $r\geq 1$. Ďalej platí:

$$\begin{aligned}
c_m^{\frac{r}{s}}\sum_{i=1}^{m} b_i^{\frac{r}{s}} E^{\frac{1}{s}} Y_i^r I_{[|X_i|<b_i\epsilon]} &= \sum_{i=1}^{m} b_m^{-\frac{r}{s}} b_i^{\frac{r}{s}} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_i\epsilon)^r+|X_i|^r}\right] I_{[|X_i|<b_i\epsilon]}\\
&\leq \sum_{i=1}^{m} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_m\epsilon)^r+|X_i|^r}\right] I_{[|X_i|<b_i\epsilon]},
\end{aligned}$$

pretože $b_m^{\ r}b_i^{-r}\geq 1$ pre $i=1,2,...m$.
Spojením oboch častí dostaneme nasledujúci odhad:

$$\begin{aligned}
P\left[\max_{m\leq k\leq n} c_k|S_k^*|\geq\epsilon\right] &\leq 2\Bigg(\sum_{i=1}^{m} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_m\epsilon)^r+|X_i|^r}\right] I_{[|X_i|<b_i\epsilon]}\\
&\quad + \sum_{i=m+1}^{n} E^{\frac{1}{s}} Y_i^r I_{[|X_i|<b_i\epsilon]}\Bigg)^s.
\end{aligned}$$

Teraz určíme hranice pre

$$P\left[\max_{m\leq k\leq n} c_k|S_k^{**}|\geq 2\epsilon\right]:$$

$$\begin{aligned}
P\left[\max_{m\leq k\leq n} c_k|S_k^{**}|\geq 2\epsilon\right] &= P[c_m|S_m^{**}|\geq 2\epsilon]\\
&\quad + \sum_{k=m+1}^{n} P\left\{\bigcap_{i=m}^{k-1}([c_i|S_i^{**}|<2\epsilon]).[c_k|S_k^{**}|\geq 2\epsilon]\right\}\\
&\leq P[c_m|S_m^{**}|\geq 2\epsilon]+\sum_{i=m+1}^{n} P[|X_i|\geq b_i\epsilon].
\end{aligned}$$

Použijeme lemu 1, v ktorej miesto ϵ položíme $b_m\epsilon$:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq m}|S_k^{**}|\geq 2b_m\epsilon\right]\leq 2\left(\sum_{i=1}^{m} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_m\epsilon)^r+|X_i|^r}\right] I_{[|X_i|\geq b_i\epsilon]}\right)^s.$$

Z toho plynie nerovnosť:

$$\begin{aligned}
P\left[\max_{m\leq k\leq n} c_k|S_k^{**}|\geq 2\epsilon\right] &\leq 2\left(\sum_{i=1}^{m} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_m\epsilon)^r+|X_i|^r}\right] I_{[|X_i|\geq b_i\epsilon]}\right)^s\\
&\quad + \left(\sum_{i=m+1}^{n} E^{\frac{1}{s}} Y_i^r I_{[|X_i|\geq b_i\epsilon]}\right)^s.
\end{aligned}$$

Tým už dostávame požadovanú nerovnosť, pretože

$$\begin{aligned} P\Big[\max_{m\le k\le n} c_k|S_k| \ge 3\epsilon\Big] \quad &\le \quad P\Big[\max_{m\le k\le n} c_k|S_k^*| \ge \epsilon\Big] \\ &\quad +P\Big[\max_{m\le k\le n} c_k|S_k^{**}| \ge 2\epsilon\Big]. \end{aligned}$$

QED

Okamžitým dôsledkom lemy 2, pri splnených predpokladoch jej znenia je:

$$P\Big[\max_{m\le k\le n} c_k|S_k| \ge 3\epsilon\Big] \le 2\left(\sum_{i=1}^{n} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_m\epsilon)^r + |X_i|^r}\right]\right)^s.$$

A okamžitým dôsledkom lemy 1 je zovšeobecnenie Čebyševovej nerovnosti: ak $\{X_k, k \ge 1\}$ je postupnosť náhodných veličín, $\{b_n\}$ je postupnosť kladných čísel, r a s ako v znení lemy, potom pre $\forall\epsilon > 0$ platí:

$$P[|S_n| \ge 2b_n\epsilon] \le 2\left(\sum_{i=1}^{n} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_i|^r}{(b_n\epsilon)^r + |X_i|^r}\right]\right)^s.$$

5.4 Aplikácia

Nerovnosti, ktoré sme získali majú praktické použitie pri určovaní konvergencie skoro iste a konvergencie v pravdepodobnosti. Pomocou nich vieme zostaviť niekoľko konvergenčných kritérií (dôkazy viď [4]):

Dôsledok 2 *Ak* $\sum_{n=1}^{\infty} E^{\frac{1}{s}}\left[\frac{|X_n|^r}{1+|X_n|^r}\right] < \infty$, *kde* $s = 1$, *keď* $0 < r \le 1$ *a* $s = r$, *keď* $r \ge 1$ *potom* $\{S_n\}$ *konverguje skoro iste.*

Dôsledok 3 *Ak* $b_n \uparrow \infty$ *a buď*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{|X_n|^r}{b_n^r + |X_n|^r}\right] < \infty,$$

pre $0 < r \le 1$ *alebo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E^{\frac{1}{r}}\left[\frac{|X_n|^r}{b_n^r + |X_n|^r}\right] < \infty,$$

pre $1 \le r$, *potom* $\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{s.i.} 0$ *pre* $n \to \infty$.

Dôsledok 4 *Ak $b_n \uparrow \infty$, $n \geq m$ a buď*

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{|X_i|^r}{b_m^r + |X_i|^r}\right] = 0,$$

pre $0 < r \leq 1$ alebo

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E^{\frac{1}{r}}\left[\frac{|X_i|^r}{b_m^r + |X_i|^r}\right] = 0,$$

pre $1 \leq r$, potom $\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{s.i.} 0$ pre $n \to \infty$.

Dôsledok 5 *Ak $b_n \uparrow \infty$ a buď*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{|X_i|^r}{b_n^r + |X_i|^r}\right] = 0,$$

pre $0 < r \leq 1$ alebo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E^{\frac{1}{r}}\left[\frac{|X_i|^r}{b_n^r + |X_i|^r}\right] = 0,$$

pre $1 \leq r$, potom $\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$ pre $n \to \infty$.

Dôsledok 6 *Ak je $\{X_k, k \geq 1\}$ postupnosť nezávislých symetrických náhodných veličín, $b_n \uparrow \infty$, $n \geq m$ a*

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{X_i^2}{b_m^2 + X_i^2}\right] = 0,$$

potom $\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{s.i.} 0$ pre $n \to \infty$.

Príklad
$P[X_i = i] = \frac{1}{i^{1+\delta}}$,
$P[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{i^{1+\delta}}$,
kde $\delta > 0$. Chceme určiť, či $\{S_n\}$ konverguje skoro iste.

$$E\frac{|X_i|^r}{1 + |X_i|^r} = \frac{i^{r-1-\delta}}{1 + i^r}$$

a

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\frac{|X_i|^r}{1 + |X_i|^r} < \infty,$$

takže konvergencia plynie z dôsledku 2 pre $0 < r \leq 1$.

Kapitola 6

Doobova nerovnosť

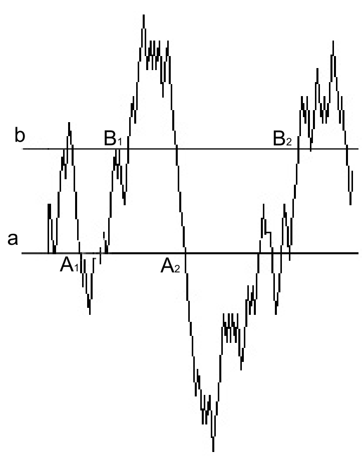
6.1 Počet preskokov intervalu

Pri vyšetrovaní asymptotiky martingálov sa často využívajú odhady počtu preskokov daného intervalu martingálom. Doobova nerovnosť, ktorou sa budeme zaoberať, dáva hornú hranicu strednej hodnoty počtu preskokov submatingálom $(S_i, i \in \{1, 2, ..., n\})$ a závisí na $E[S_n]^+$ a nie na n.

Definícia 7 *Pre $n \in \mathcal{N}$,$a, b, y_1, ..., y_n \in \mathcal{R}$,$a < b$ definujeme počet $\uparrow$-preskokov intervalu (a, b) postupnosťou $y_1, ..., y_n$ ako*

$$H_n(a, b, y_1, ..., y_n) = \mathrm{card}\Big\{(i, j) \in \mathcal{N}^2 : 1 \leq i < j \leq n, y_i \leq a,$$

$$y_j \geq b, a < y_k < b \ \forall k \in \{i + 1, i + 2, ..., j - 1\}\Big\}.$$



Obr.2.: V tomto prípade náhodnej prechádzky sú 2 preskoky intervalu (a, b).

Pre nekonečnú postupnosť y_i, $i \in \mathcal{N}$ sa počet preskokov intervalu (a, b) definuje ako limita $\lim_{n\to\infty} H_n(a, b, y_1, ..., y_n)$.

Veta 15 *Nech* $(S_i, i \in \{1, 2, ..., n\})$ *je submartingál,* $n \in \mathcal{N}$, $-\infty < a < b < +\infty$. *Potom platí*

$$EH_n(a, b, S_1, ..., S_n) \leq \frac{E(S_n - a)^+}{b - a} - \frac{E(S_1 - a)^+}{b - a} \leq \frac{E(S_n - a)^+}{b - a}.$$

Dôkaz:
Položme $Z_k = (S_k - a)^+$ pre $k \in \mathcal{N}$, takže Z_k je submartingál a platí:

$$H_n(0, b - a, Z_1, ..., Z_n) = H_n(a, b, S_1, ..., S_n) = H_n.$$

Definujeme si markovské časy:

$$\begin{aligned}
t_1^* &= 1, \\
t_2^* &= min\{1 \leq i : Z_i = 0\} \wedge n, \\
t_3^* &= min\{t_2^* < i : Z_i \geq b - a\} \wedge n, \\
&\quad ..., \\
t_{2v}^* &= min\left\{t_{2v-1}^* < i : Z_i = 0\right\} \wedge n, \\
t_{2v+1}^* &= min\{t_{2v}^* < i : Z_i \geq b - a\} \wedge n, \\
&\quad ..., \\
t_{n+1}^* &= n.
\end{aligned}$$

Takže platí:

$$\begin{aligned}
Z_n - Z_1 &= (Z_n - Z_{n-1}) + (Z_{n-1} - Z_{n-2}) + ...(Z_2 - Z_1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(Z_{t_{k+1}^*} - Z_{t_k^*}\right) \\
&= \sum_{k:2k\leq n} \left(Z_{t_{2k+1}^*} - Z_{t_{2k}^*}\right) + \sum_{k:2k\leq n+1} \left(Z_{t_{2k}^*} - Z_{t_{2k-1}^*}\right) \\
&\geq (b - a)H_n + \sum_{k:2k\leq n+1} \left(Z_{t_{2k}^*} - Z_{t_{2k-1}^*}\right).
\end{aligned}$$

Posledná úprava vychádza z toho, že v prípade, ak $2k \leq n$, tak žiadny preskok nie je neukončený, v druhom prípade, keď $2k \leq n + 1$, tak preskok ukončený nie je. Druhý člen má nezápornú strednú hodnotu. Dokazovanú nerovnosť dostávame vypočítaním strednej hodnoty:

$$E[Z_n - Z_1] = E[(S_n - a)^+] - E[(S_1 - a)^+] \geq (b - a)EH_n.$$

QED

6.1.1 Aplikácia

Počítanie preskokov má praktické vyžitie na overenie konvergencie skoro iste postupnosti náhodných veličín (dôkaz viď [3] str. 24).

Veta 16 *Nech S_n, $n \in \mathcal{N}$ sú reálne náhodné veličiny.*

(i) Zovšeobecnená reálna náhodná veličina S taká, že $S_n \xrightarrow{s.i.} S$ pre $n \to \infty$ existuje vtedy a len vtedy, keď $\forall\ a, b \in \mathcal{R}$, $a < b$ je $P[H(a, b; S_n, n \in \mathcal{N}) < +\infty] = 1$.

(ii) Reálna náhodná veličina S taká, že $S_n \xrightarrow{s.i.} S$ pre $n \to \infty$ existuje vtedy a len vtedy, keď $P[\sup_{n\in\mathcal{N}} |S_n| < +\infty] = 1$ a $\forall\ a, b \in \mathcal{R}$, $a < b$ je $P[H(a, b; S_n, n \in \mathcal{N}) < +\infty] = 1$.

Doobova nerovnosť je taktiež základom dôkazu Doobovej vety o konvergencii martingálov(dôkaz viď [3] str. 26).

Veta 17 *(Doobova veta)*
Nech $(S_n, n \in \mathcal{N})$ je submartingál, ktorý splňuje

$$\sup_{n\in\mathcal{N}} E[S_n^+] < +\infty,$$

potom existuje $S \in \mathcal{L}_1$ také, že $S_n \xrightarrow{s.i.} S$ pre $n \to +\infty$ a

$$E[S^+] \leq \liminf_{n\to+\infty} E[S_n^+] = \sup_{n\in\mathcal{N}} E[S_n^+],$$

$$E[S^-] \leq \liminf_{n\to+\infty} E[S_n^-] \leq \sup_{n\in\mathcal{N}} E[S_n^+] - E[S_1].$$

Z tejto vety dostávame podmienky pre konvergenciu skoro iste k integrovateľnej náhodnej veličine pre supermartingál aj pre martingál:
Predpoklad $\sup_{n\in\mathcal{N}} E[S_n^+] < +\infty$ je vlastne podmienkou pre ohraničenosť submartingálu zhora v $\mathcal{L}_1$. Ak uvažujeme supermartingál $(S_n, n \in \mathcal{N})$, tak potom $-S_n$ je submartingál. Podmienka konvergencie skoro iste pre supermartingál je teda jeho ohraničenosť zdola. Pokiaľ je supermartingál nezáporný, je ohraničený v $\mathcal{L}_1$, pretože $E|S_n| = ES_n \leq ES_1$.
Pre martingál preto už jednoducho dostávame, že pokiaľ je zdola alebo zhora ohraničený, je nekladný alebo nezáporný, tak konverguje skoro iste ($E|S_n| < \infty$).

Príklad
Nech $X_1, X_2, ...$ sú nezávislé náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou, pre ktoré platí, že $\sum_{i=1}^{\infty} E[X_i^2] < \infty$, tak potom $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ konverguje skoro iste, pretože $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ je martingál, ktorý má ohraničené druhé momenty. Je ohraničený v $\mathcal{L}_2$, a teda aj v $\mathcal{L}_1$.
Na riešenie tejto úlohy by sme mohli použiť aj 1.Kolmogorovovu nerovnosť (veta 6). Postup je analogický riešeniu príkladu v časti 4.1, takže ho už len trochu stručnejšie naznačíme:

$$P\left[\max_{1 \le k \le n} |S_{m+k} - S_m| > \epsilon\right] \le \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=m+1}^{m+n} E[X_k^2],$$

pre $\epsilon > 0$. Limitným prechodom pre $m, n \to \infty$ dostávame, že S_n je cauchyovská skoro iste, a teda konvergentá skoro iste. Tento postup je síce správny, ale využitie teórie martingálov je jednoznačne efektívnejšie.

Príklad (Vetviaci sa proces)
Uvažujme populáciu. Predpokladajme, že na začiatku máme práve jedného jedinca (v 0-tej generácii). Každý jedinec má v každej generácii k potomkov s pravdepodobnosťou p_k, $\sum_0^{\infty} p_k = 1$. Množenia jednotlivých jedincov sú nezávislé. Nech μ je stredný počet potomkov, teda

$$\mu = \sum_0^{\infty} k p_k < \infty.$$

Označme T_n počet jedincov v n-tej generácii, takže $T_0 = 1$. Nech $X_n^{(k)}$ sú nezávislé náhodné veličiny ($\mathcal{L}(X_n^{(k)}) = \{p_0, p_1, ...\}$ pre $n, k \in \mathcal{N}$), ktoré predstavujú počet potomkov k-teho jedinca v predchádzajúcej, $(n-1)$ generácii. Súčet týchto potomkov dá počet jedincov v n-tej generácii, t.j. určite platí

$$T_n = \sum_{k=1}^{T_{n-1}} X_n^{(k)}.$$

Definujeme si $M_n := T_n \mu^{-n}$, $n \ge 0$. Overíme, že postupnosť M_n tvorí martingál.
Intuitívne je jasné, že $E[T_n | T_{n-1}] = \mu T_{n-1}$, pretože každý jedinec v $(n-1)$ generácii ma stredný počet potomkov μ.

$$E[T_n | T_1, ..., T_{n-1}] = E[\mu T_{n-1} | T_1, ..., T_{n-1}] = \mu T_{n-1}.$$

M_n je nezáporný martingál, a preto konverguje skoro iste k integrovateľnej náhodnej veličine. Ak je $\mu < 1$, tak populácia vymrie skoro iste do času n.

Vetviaci sa proces sa môže použiť ako model rastu populácie, epidémií alebo nukleárnych reakcií.

Na základe Doobovej vety sa ďalej odvodzujú vety o sčítateľnosti radu náhodných veličín a zákon veľkých čísel za rovnakých predpokladov ako pre nezávislé náhodné veličiny (viď [3] str. 31).

6.2 Brownova nerovnosť

Brownova nerovnosť je nerovnosťou Kolmogorovovho typu pre martingál s nulovou strednou hodnotou, ktorej dôkaz je založený na Doobovej nerovnosti (veta 15).

Veta 18 *Nech* $(S_i, i \in \{1,2,...n\})$ *je martingál taký, že* $ES_1 = 0$, $n \in \mathcal{N}$, $\epsilon > 0$, *potom*

$$P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge 2\epsilon\right] \le P[|S_n| > \epsilon] + \int_{[|S_n|\ge 2\epsilon]} (\epsilon^{-1}|S_n| - 2)dP \le \epsilon^{-1}\int_{[|S_n|\ge\epsilon]}|S_n|dP.$$

Dôkaz:
Označíme si počet preskokov martingálu $S_0, S_1, S_2, ...$, kde $S_0 = 0$:

$$H_n = H_{n+1}(-2\epsilon, -\epsilon, 0, S_1, ..., S_n).$$

Udalosť si rozdelíme na dve:

$$P\left[\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge 2\epsilon\right] \le P\left[\min_{1\le k\le n} S_k \le -2\epsilon\right] + P\left[\max_{1\le k\le n} S_k \ge 2\epsilon\right].$$

Použitím Doobovej nerovnosti dostávame:

$$\begin{aligned}
P\left[\min_{1\le k\le n} S_k \le -2\epsilon\right] &\le P\left[\min_{1\le k\le n} S_k \le -2\epsilon, S_n \ge -\epsilon\right] + P[S_n < -\epsilon] \\
&\le P[H_n \ge 1] + P[S_n < -\epsilon] \\
&\le EH_n + P[S_n < -\epsilon] \\
&\le \epsilon^{-1}E(S_n + 2\epsilon)^+ - \epsilon^{-1}2\epsilon + P[S_n < -\epsilon] \\
&= E(\epsilon^{-1}S_n + 2)^+ - 2 + P[S_n < -\epsilon].
\end{aligned}$$

Analogickým postupom dostaneme odhad aj pre druhý jav:

$$\begin{aligned} P\Big[\max_{1\le k\le n} S_k \ge 2\epsilon\Big] &= P\Big[\min_{1\le k\le n} -S_k \le -2\epsilon\Big] \\ &\le \epsilon^{-1}E(-S_n+2\epsilon)^+ - \epsilon^{-1}2\epsilon + P[S_n > \epsilon] \\ &= E(-\epsilon^{-1}S_n+2)^+ - 2 + P[S_n > \epsilon]. \end{aligned}$$

Takže pomocou elementárnych úprav a využitím predpokladu, že $ES_n = 0$ dostávame:

$$\begin{aligned} P\Big[\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge 2\epsilon\Big] &\le P\Big[\min_{1\le k\le n} S_k \le -2\epsilon\Big] + P\Big[\max_{1\le k\le n} S_k \ge 2\epsilon\Big] \\ &\le \int_{[S_n > -2\epsilon]} (\epsilon^{-1}S_n + 2)dP + \int_{[S_n < 2\epsilon]} (2 - \epsilon^{-1}S_n)dP \\ &\quad -4 + P[|S_n| > \epsilon] \\ &= -2P[S_n \le -2\epsilon] - 2P[S_n \ge 2\epsilon] - \int_{[S_n \le -2\epsilon]} \epsilon^{-1}S_n dP \\ &\quad + \int_{[S_n \ge 2\epsilon]} \epsilon^{-1}S_n dP + P[|S_n| > \epsilon] \\ &= P[|S_n| > \epsilon] - 2P[|S_n| \ge 2\epsilon] + \int_{[|S_n| \ge 2\epsilon]} \epsilon^{-1}|S_n| dP \\ &\le P[|S_n| \ge \epsilon] + \int_{[|S_n| \ge 2\epsilon]} (\epsilon^{-1}S_n - 1)dP \\ &\le P[|S_n| \ge \epsilon] + \int_{[|S_n| \ge \epsilon]} (\epsilon^{-1}S_n - 1)dP \\ &= \epsilon^{-1}\int_{[|S_n| \ge \epsilon]} |S_n| dP. \end{aligned}$$

QED

6.2.1 Aplikácia

Ukážeme, ako Brownova nerovnosť platí pre nezáporné submartingály. Majme teda S_n nezáporný submartingál a nech je $\epsilon > 0$. Označíme si počet preskokov intervalu $(\epsilon, 2\epsilon)$ submartingálom S_n

$$H_n = H_n(\epsilon, 2\epsilon, S_1, S_2, ..., S_n).$$

Platí:

$$P\Big[\max_{1\le k\le n} S_k > 2\epsilon\Big] = P\Big[\max_{1\le k\le n} S_k > 2\epsilon, S_1 \le \epsilon\Big] + P[S_1 > \epsilon]$$

$$\begin{aligned} &\leq P[H_n \geq 1] + P[S_1 > \epsilon] \\ &\leq EH_n + P[S_1 > \epsilon]. \end{aligned}$$

Teraz použijeme Doobovu nerovnosť (veta 15)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{E[(S_n - \epsilon)I_{[S_n > \epsilon]}]}{\epsilon} + P[S_1 > \epsilon] \\ &\leq \frac{E[S_n I_{[S_n > \epsilon]}]}{\epsilon} + P[S_1 > \epsilon]. \end{aligned}$$

Brownova nerovnosť sa využíva predovšetkým v teoretickej rovine pri hľadaní maximálnych nerovností pri iných predpokladoch v pokročilejších partiách teórie pravdepodobnosti, či pri ich ďalších zovšeobecneniach.

Literatúra

[1] Chow, Y.S., Teicher H.: *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer - Verlag, New York, 1978.

[2] Kounias, E.G., Weng, T.S.: *An Inequality and Almost Sure Convergence*, Ann. Math. Statistics **40** (1969) 1091-1093.

[3] Lachout, P.: *Diskrétní martingaly*, 2005.

[4] Szynal, D.: *An Extension of the Hájek-Rényi Inequality for One Maximum of Partial Sums*, The Annals of Statistics **4** (1973) 740-744.

[5] Štěpán, J.: *Teorie pravděpodobnosti: Matematické základy*, Academia, Praha, 1987.

[6] Tucker, H.G.: *A Graduate Course in Probability*, Academic Press, New York, 1967.

[7] Williams, D.: *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[8] Zvára, K., Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, Praha, 2002.