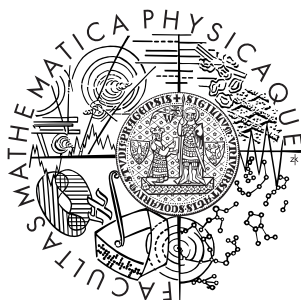


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Martin Hadrava

Modelování proudění v časově závislých oblastech

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.
Studijní program: MATEMATIKA, Obecná matematika

2007

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému vedoucímu Prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc., Dr. H. C. za odborné vedení při tvorbě práce, pečlivé vysvětlení mnoha částí dané problematiky a všeobecnou pomoc při psaní textu a RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D. z Fakulty strojní ČVUT za trpělivé konzultace a poskytnutí jím vypracovaného softwaru, pomocí něhož byl proveden numerický experiment.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejněním.

V Praze dne 24. května 2007

Martin Hadrava

Obsah

1	Úvod	5
2	Základní rovnice	7
2.1	Rovnice popisující proudění	7
2.2	Úprava rovnic popisujících proudění	8
2.3	ALE metoda	9
2.4	Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE popisu	10
3	Diskretizace problému	13
3.1	Diskretizace v čase	13
3.2	Prostorová diskretizace	14
3.2.1	Slabá formulace	14
3.2.2	Metoda konečných prvků	17
3.3	Stabilizace metody konečných prvků	18
4	Realizace diskrétního problému	20
4.1	Oseenův problém	20
4.2	Řešení linearizovaného Oseenova problému	21
5	Numerický experiment	25
5.1	Konstrukce ALE zobrazení	25
5.2	Rychlost ALE zobrazení	26
5.3	Formulace numerického experimentu	27
5.3.1	Výpočetní oblast	27
5.3.2	Vazkost, tlak, počáteční a okrajové podmínky	27
5.4	Výsledky	29
6	Závěr	41
7	Doplňky	42
7.1	Definice diferenciálních operátorů	42
7.2	Dvoukrokové implicitní schéma druhého řádu přesnosti pro apro- ximaci časové derivace	42
7.3	Zobecněná derivace	43
7.4	Greenova věta	43
	Literatura	44

Název práce: Modelování proudění v časově závislých oblastech
Autor: Martin Hadrava
Katedra: Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., Dr. H. C.
e-mail vedoucího: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce se zabývá numerickým modelováním proudění v časově závislých oblastech. Konkrétně se jedná o proudění v kanálech s pohyblivými stěnami s cílem modelovat proudění vzduchu v hlasivkách. Je použita metoda ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian method) aplikovaná na systém Navierových-Stokesových rovnic. Příslušná okrajová úloha byla diskretizována metodou konečných prvků. Vzhledem k možnosti velkých Reynoldsových čísel byla aplikována stabilizace metodou proudnicové difúze. K řešení testovacích úloh byly použity programy vypracované úpravou stávajícího softwaru vyvinutého na MFF UK a Fakultě strojní ČVUT.

Klíčová slova: Navierovy-Stokesovy rovnice, ALE metoda, metoda konečných prvků, SUPG stabilizace, Oseenův model

Title: Modelling of flow in time dependent domains
Author: Martin Hadrava
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., Dr. H. C.
Supervisor's e-mail address: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This work is concerned with the modelling of flow in time dependent domains. We deal with the simulation of flow in channels with moving walls. The goal is the modelling of flow through vocal folds. The Navier-Stokes system is reformulated with the aid of the ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) method. The resulting initial-boundary value problem is discretized by the finite element method with streamline diffusion stabilization. A system of programmes for the solution of the problem was worked out using an existing software developed at the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University and the Faculty of Mechanical Engineering of Czech Technical University.

Keywords: Navier-Stokes equations, ALE method, finite element method, SUPG stabilization, Oseen's model

Kapitola 1

Úvod

Proudění tekutiny hraje důležitou úlohu v mnoha technických oborech. Největší uplatnění lze nalézt v leteckém průmyslu, kde se zkoumá obtékání vzduchu kolem leteckého profilu a jeho interakce s ním, stojírenství (turbíny, kompresory, pumpy), stavebnictví (stabilita mostů) a medicíně (proudění krve v cévách a srdci, proudění vzduchu v hlasivkách). Dostupný komerční software, jako je např. NASTRAN, FLUENT nebo ANSYS, je schopen řešit pouze úzký okruh problémů aeroelasticity nebo hydroelasticity a omezuje se většinou pouze na lineárnizované modely.

Analytické metody jsou schopny poskytnout řešení jen pro velmi speciální a nekomplikované problémy. V reálných aplikacích je nicméně nutné aplikovat složitější modely, bližící se více skutečným situacím. Je to především díky tomu, že jsme nuceni uvažovat vazkou tekutinu, časově proměnnou oblast proudění a turbulentní jevy.

V této práci se zaměříme na numerickou simulaci proudění vazké nestlačitelné tekutiny v rovinném kanálu, jehož neprostupné stěny vykonávají námi předepsaný pohyb. Poznamenejme, že reálné aplikaci je blíže pohyb stěn v interakci s proudící tekutinou. Motivačním příkladem je pro nás proudění vzduchu v lidských hlasivkách. Matematický model proudění tekutiny je reprezentován systémem rovnic tvořeným dvourozměrnými Navierovými-Stokesovými rovnicemi a rovnicí kontinuity, které jsou doplněny počátečními podmínkami a smíšenými okrajovými podmínkami. Existuje velký počet numerických technik pro řešení tohoto systému rovnic. Jako příklad uveďme metodu konečných diferencí nebo metodu konečných objemů. V případě oblastí s komplikovanou geometrií nebo smíšených okrajových podmínek se jako nejvhodnější řešení ukazuje použití metody konečných prvků. Metoda konečných prvků vyžaduje splnění Babuškovy-Brezziho podmínky, která zaručuje numerickou stabilitu schématu. Prostory konečných prvků pro rychlost a tlak proto musí být vhodně zvoleny.

Důležitou veličinou charakterizující proudění je tzv. Reynoldsovo číslo, které je přímo úměrné délce uvažovaného kanálu a průměrné rychlosti proudění na vstupu a nepřímo úměrné vazkosti tekutiny. Pro vysoká Reynoldsova čísla je nezbytné použít stabilizaci metody konečných prvků, např. metodou proudnicové difúze (streamline-diffusion method).

Hlavním tématem této práce je časová závislost uvažované výpočetní oblasti.

Pro odstranění této komplikace je použita ALE metoda (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), která je založena na přeformulování Navierových-Stokesových rovnic za použití ALE zobrazení námi zvolené referenční oblasti na výpočetní oblast v čase t .

Aplikace metody konečných prvků na systém Navierových-Stokesových rovnic popisujících proudění viskózní tekutiny vede k velkému systému nelineárních algebraických rovnic. Abychom mohli problém vyřešit, použijeme vhodnou linearizaci a dostatečně rychlý řešič pro soustavy lineárních rovnic.

Východiskem pro realizaci numerických výpočtů byl program vypracovaný RNDr. Petrem Sváčkem, Ph.D., který byl upraven a jehož použitím byly provedeny numerické experimenty.

Kapitola 2

Základní rovnice

V této kapitole se budeme zabývat úpravou rovnic popisujících proudění pro námi uvažovaný případ vazké nestlačitelné tekutiny v rovinném kanálu a jejich převedením do ALE formulace, která nám umožní zvládnout komplikaci v podobě časově proměnné výpočetní oblasti.

2.1 Rovnice popisující proudění

Uvažované proudění je popsáno rovnicí kontinuity (představující zákon zachování hmoty):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

a Navierovými-Stokesovými rovnicemi (které reprezentují zákon zachování hybnosti):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Tyto rovnice uvažujeme v množině

$$M = \{(\mathbf{x}, t); t \in (0, T), \mathbf{x} \in \Omega_t\}, \quad (2.3)$$

kde $T > 0$ a $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast vyplněná tekutinou v čase t . Dále $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, x_i jsou kartézské souřadnice v \mathbb{R}^2 , $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je vektor rychlosti proudící tekutiny se složkami $u_i = u_i(\mathbf{x}, t) : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ je hustota tekutiny, $\rho : M \rightarrow (0, \infty)$ a τ_{ij} , $i, j = 1, 2$, jsou složky tenzoru napětí, který je definován vztahem

$$\tau = (-P + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \quad (2.4)$$

kde $\lambda, \mu > 0$ označují koeficienty vazkosti, $P = P(\mathbf{x}, t) : M \rightarrow \mathbb{R}$ je dynamický tlak, \mathbf{I} je jednotková matice řádu 2 a \mathbf{D} je tenzor rychlosti deformace definovaný vztahy

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (d_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1}^2,$$

$$d_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (2.5)$$

Odvození výše uvedených rovnic a vztahů lze najít např. v [1]. V dalším budeme předpokládat, že všechny zmíněné veličiny popisující proudění jsou dostatečně hladké v množině M .

2.2 Úprava rovnic popisujících proudění

Nejprve provedeme úpravy rovnic popisujících proudění (2.2) dosazením vztahů (2.4) a (2.5). Postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= (-P + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(\mathbf{u}), \\ \tau_{ij} &= \left(-P + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \text{kde } \delta_{ij} &\text{ je Kroneckerovo delta, } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \left(-\frac{\partial P}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right).\end{aligned}$$

Odtud získáme pravou stranu Navierových-Stokesových rovnic:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right).$$

Jelikož v této práci uvažujeme nestlačitelné proudění ($\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \text{konst.} > 0$), lze rovnici (2.1) zjednodušit na tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.6)$$

Odtud a ze záměnnosti parciálních derivací 2. řádu dostaneme

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0.$$

Rovnice (2.2) proto můžeme přepsat do tvaru

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(u_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2.$$

Označíme-li $p = \frac{P}{\rho}$ kinematický tlak a $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ kinematickou vazkost, získáme rovnice

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2.$$

Zde

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u_i \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j + \sum_{j=1}^2 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + u_i \operatorname{div} \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i.\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2},$$

získáme tímto způsobem standardní tvar Navierových - Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \Delta u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

které uvažujeme spolu s rovnicí kontinuity

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.8)$$

Rovnice (2.7) lze zapsat ve vektorovém tvaru

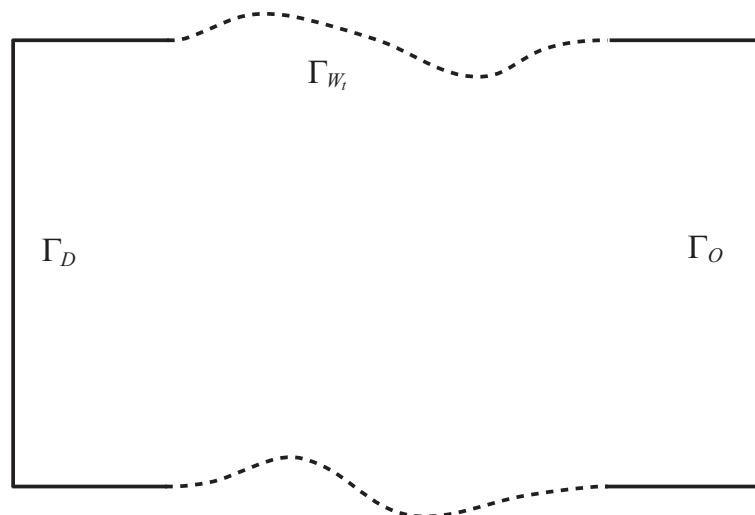
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.9)$$

2.3 ALE metoda

Časová závislost oblasti vyplněné tekutinou způsobuje potíže při numerickém řešení proudění. Abychom tyto potíže odstranili, použijeme tzv. ALE metodu (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), která byla navržena v [2] a aplikována v [5] a [6]. Hranici $\partial\Omega_t$ oblasti Ω_t budeme uvažovat ve tvaru

$$\partial\Omega_t = \Gamma_D \cup \Gamma_O \cup \Gamma_{W_t}, \quad (2.10)$$

kde Γ_D bude představovat vstup, kterým tekutina vtéká do oblasti, a nepohyblivé části pevných, neprostupných stěn, Γ_O je výstup a Γ_{W_t} značí pohyblivé neprostupné části stěn. Nepohyblivé části stěn uvažujeme v blízkosti vstupu a výstupu (viz *obr. 1*). Předpokládáme, že části hranice Γ_D a Γ_O nezávisí na čase. Na Γ_D a Γ_{W_t} zadáváme Dirichletovu okrajovou podmínku pro rychlost, kdežto na Γ_O předepisujeme přirozenou “do-nothing” podmínku, která je výhodná pro numerické řešení naší úlohy.



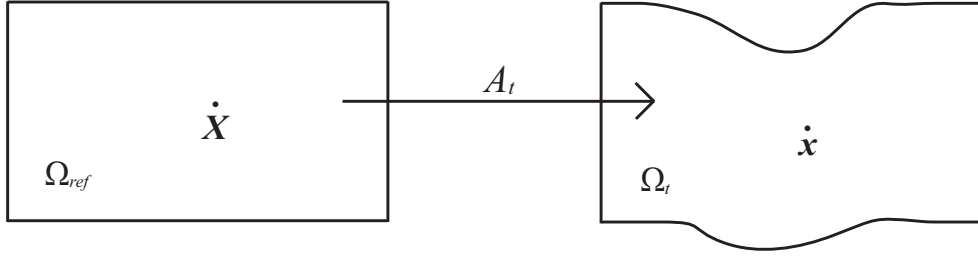
Obr. 1 - Kanál s pohyblivými stěnami

- část hranice Γ_D
- část hranice Γ_{W_t}
- část hranice Γ_O

Pro definici ALE transformace zvolíme referenční oblast $\Omega_{ref} \subset \mathbb{R}^2$ a dále zobrazení

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t : \bar{\Omega}_{ref} &\rightarrow \bar{\Omega}_t, \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \bar{\Omega}_{ref}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_t$ a $t \geq 0$. Předpokládáme, že zobrazení $\mathcal{A}_{(\cdot)} = \mathcal{A}_t$ je hladké (tj. třídy $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_{ref} \times [0, T])$), prosté a na. Oblasti Ω_{ref} a Ω_t jsou totožné na místech hranice, kde nedochází k její deformaci. V našem případě jsou to množiny Γ_D a Γ_O . V dalším budeme předpokládat, že $\Omega_{ref} = \Omega_0$. ALE zobrazení lze pak volit tak, že je to identické zobrazení v okolí části hranice, která na čase nezávisí. Na rozdíl od prostorových souřadnic $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_t$ budeme nazývat $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \bar{\Omega}_{ref}$ referenčními souřadnicemi (nebo též ALE souřadnicemi).



Obr. 2 - ALE zobrazení

2.4 Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE popisu

Z důvodu proměnlivé výpočetní oblasti není možné aproximovat časovou derivaci $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ přímo, jelikož nejsme schopni definovat výraz $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ pro pevný prostorový bod \mathbf{x} a různé časové vrstvy, pro něž jsou oblasti Ω_t různé. Je tedy nejprve nutné převést závislost hledané funkce \mathbf{u} na prostorové proměnné do referenční oblasti, která bude shodná pro všechny časové okamžiky t , poté přenést časovou derivaci funkce \mathbf{u} do této referenční oblasti a v ní použít vhodnou diskretizaci. Pro převedení časové derivace funkce \mathbf{u} a následně i Navierových-Stokesových rovnic do ALE formulace však nejprve potřebujeme definovat několik nových pojmů.

Definice: Nechť $\mathcal{A}_{(\cdot)} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_{ref} \times [0, T])$. Vektorovou funkci

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}} : \bar{\Omega}_{ref} \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_t(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

budeme nazývat rychlost ALE zobrazení.

Rychlost $\tilde{\mathbf{w}}$ je vyjádřena vzhledem k referenčním (ALE) souřadnicím. Zpětnou ALE transformací ji můžeme vyjádřit vzhledem k prostorovým souřadnicím ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \tilde{\mathbf{w}} \circ \mathcal{A}_t^{-1}, \text{ tj.} \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\mathbf{w}}(\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_t.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Dále definujeme *ALE derivaci* $\frac{D^A}{Dt}$:

Definice: Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Položme

$$\tilde{f}(\mathbf{X}, t) = f(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_{ref}.$$

Potom definujeme *ALE derivaci* funkce f vztahem

$$\frac{D^A}{Dt} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\mathbf{X}, t)|_{X=\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})}. \quad (2.14)$$

Nechť $f \in \mathcal{C}^1(M)$. Aplikací věty o derivaci složeného zobrazení dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t)) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t) \frac{\partial (\mathcal{A}_t(\mathbf{X}))_j}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t). \quad (2.15)$$

Tudíž

$$\begin{aligned}\frac{D^A}{Dt} f(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\mathbf{X}, t)|_{X=\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t)|_{X=\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t) \frac{\partial (\mathcal{A}_t(\mathbf{X}))_j}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t) \right) |_{X=\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})} = \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) w_j(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \\ &= (\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}$$

krátce

$$\frac{D^A}{Dt} f = (\mathbf{w} \cdot \nabla) f + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Odtud získáme formulaci Navierových-Stokesových rovnic v ALE tvaru

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.17)$$

Rovnice kontinuity zůstává v původním tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.18)$$

K soustavě (2.17), (2.18) přidáme počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad (2.19)$$

kde $\mathbf{u}_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je daná funkce.

Dále uvažujeme Dirichletovu okrajovou podmínku na vstupu a nepohyblivých částech stěn kanálu

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D \times (0, T)} = \mathbf{u}_D \quad (2.20)$$

a Dirichletovu okrajovou podmínku na pohyblivých neprostupných stěnách

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{W_t} \times (0, T)} = \mathbf{w}|_{\Gamma_{W_t} \times (0, T)}, \quad (2.21)$$

kde $\mathbf{u}_D : \Gamma_D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ je daná funkce. Předpokládáme tedy, že rychlost proudící tekutiny \mathbf{u} na části hranice Γ_{W_t} je rovna rychlosti pohybující se stěny.

Na výstupu Γ_O použijeme “do-nothing” podmínku:

$$-p\mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = -p_{ref}\mathbf{n} \quad \text{na } \Gamma_O \times (0, T), \quad (2.22)$$

kde \mathbf{n} je vnější jednotková normála k $\partial\Omega_t$ na Γ_O a $p_{ref} : \Gamma_O \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $p_{ref} = konst.$ je daný referenční tlak na výstupu z kanálu.

Kapitola 3

Diskretizace problému

3.1 Diskretizace v čase

Připomeňme si nejprve Navierovu-Stokesovu rovnici v ALE formulaci:

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } M,$$

ve které chceme aproximovat ALE derivaci $\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u}$. Pro časovou diskretizaci zvolme časový krok $\tau > 0$ a dělicí body $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, \dots, K$, kde $K = \lfloor \frac{T}{\tau} \rfloor$ ¹, tj. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K \leq T$. Využijeme definici ALE derivace

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right) \Big|_{\mathbf{X}=\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})}, \quad (3.1)$$

kde $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t)$ a použijeme dvoukrokové implicitní schéma druhého řádu přesnosti (viz Doplňky, 7.2). Pro přehlednější zápis použijeme dále značení:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{n+1} &= \mathcal{A}_{t_{n+1}}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{x}^n = \mathcal{A}_{t_n}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{x}^{n-1} = \mathcal{A}_{t_{n-1}}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_0 \text{ pevné,} \\ \tilde{\mathbf{u}}^n &\approx \tilde{\mathbf{u}}(t_n), \quad p^n \approx p(t_n), \quad \mathbf{u}^n \approx \mathbf{u}(t_n), \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde $\tilde{\mathbf{u}}^n$, p^n a \mathbf{u}^n aproximují po řadě funkce $\tilde{\mathbf{u}}(t_n)$, $p(t_n)$ a $\mathbf{u}(t_n)$. Pak můžeme aproximovat výraz $\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}(\mathbf{X}, t_{n+1})$, $\mathbf{X} \in \Omega_0$, takto:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}(\mathbf{X}, t_{n+1}) \approx \frac{3\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_{n+1}) - 4\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_n) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_{n-1})}{2\tau}. \quad (3.3)$$

Odtud, z (3.1) a (3.2) získáme aproximaci ALE derivace ve tvaru

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}^{n+1}, t_{n+1}) \approx \frac{3\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - 4\mathbf{u}^n(\mathbf{x}^n) + \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}^{n-1})}{2\tau}. \quad (3.4)$$

Dosazením této aproximace do původní rovnice v ALE formulaci dostaneme rovnici pro neznámé funkce \mathbf{u}^{n+1} a p^{n+1} :

$$\frac{3\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - 4\mathbf{u}^n(\mathbf{x}^n) + \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}^{n-1})}{2\tau} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) +$$

¹ $\lfloor \cdot \rfloor$ značí dolní celou část reálného čísla

$$+ \left((\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) + \nabla p^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0, \quad (3.5)$$

kteřou doplníme o rovnici kontinuity

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0. \quad (3.6)$$

Tyto rovnice uvažujeme pro všechna $\mathbf{x}^{n+1} \in \Omega_{t_{n+1}}$, $n = 1, 2, \dots, K - 1$. Zřejmě platí:

$$\mathbf{x}^i = \mathcal{A}_{t_i} \left(\mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}^{n+1}) \right), \quad i = n - 1, n.$$

Symbol \mathbf{w}^{n+1} aproximuje rychlost ALE zobrazení v čase t_{n+1} , $\mathbf{w}^{n+1} \approx \mathbf{w}(t_{n+1})$.

Rovnice (3.5), (3.6) můžeme ještě přepsat pomocí označení

$$\hat{\mathbf{u}}^i(\mathbf{x}^{n+1}) = \mathbf{u}^i \left(\mathcal{A}_{t_i} \left(\mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}^{n+1}) \right) \right), \quad \mathbf{x}^{n+1} \in \Omega_{t_{n+1}}.$$

Získáme tak následující problém:

Hledáme funkce $\mathbf{u}^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $p^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující v $\Omega_{t_{n+1}}$ rovnice

$$\frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} + \left((\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (3.8)$$

Rovnice (3.7), (3.8) dále doplníme o okrajové podmínky (2.20), (2.21) a (2.22) uvažované v čase $t = t_{n+1}$.

V dalším budeme pro jednoduchost psát \mathbf{u}, p, t a Ω místo $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, t_{n+1}$ a $\Omega_{t_{n+1}}$.

3.2 Prostorová diskretizace

3.2.1 Slabá formulace

Pro diskretizaci v prostoru použijeme metodu konečných prvků. Pro její aplikaci je třeba přeformulovat rovnice

$$\frac{3\mathbf{u} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} + \left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3.10)$$

kteřé uvažujeme v množině Ω , ve slabém smyslu. Nejprve ale zavedeme označení pro prostory funkcí, které budeme v dalším potřebovat. Především

$$\mathcal{Q} = \mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ lebesgueovsky měřitelná, } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

je Lebesgueův prostor funkcí na množině Ω integrovatelných s druhou mocninou,

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{L}^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2(\Omega), \quad i = 1, 2 \right\}$$

je Sobolevův prostor funkcí na Ω , v jehož definici uvažujeme derivace ve zobeněném smyslu (viz Doplnky, 7.3). Dále položíme

$$\mathcal{W} = \left(\mathcal{H}^1(\Omega) \right)^2,$$

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{W}; \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = 0, \mathbf{v}|_{\Gamma_{W_t}} = 0 \right\}.$$

Restrikce funkce \mathbf{v} v předchozí definici jsou chápány ve smyslu stop². Nyní přejdeme k odvození slabé formulace našeho problému. Vynásobíme rovnice (3.9) resp. (3.10) testovací funkcí $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ resp. $q \in \mathcal{Q}$, vzniklé identity zintegrujeme přes oblast Ω a vhodně použijeme Greenovu větu, jejíž znění je uvedeno v kapitole Doplnky, 7.4. Postupně dostaneme:

Násobení testovacími funkcemi:

$$\begin{aligned} \frac{3\mathbf{u} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} \cdot \mathbf{v} + \left(\left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}) q &= 0, \end{aligned}$$

integrace přes oblast Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{3\mathbf{u} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(\left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

Aplikace Greenovy věty na člen s $\Delta \mathbf{u}$ dává vztah

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= -\nu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \\ &= -\nu \int_{\Gamma_O} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \\ &= - \int_{\Gamma_O} (p - p_{ref}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde \mathbf{n} je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$. V úpravách jsme využili toho, že $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ (tj. $\mathbf{v}|_{\Gamma_D} = 0$, $\mathbf{v}|_{\Gamma_{W_t}} = 0$) a okrajové “do-nothing” podmínky (2.22).

Člen s ∇p :

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_O} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Po těchto úpravách dostaneme následující rovnice:

$$\int_{\Omega} \frac{3\mathbf{u} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(\left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} -$$

²Definici a základní vlastnosti operátoru stop pro funkce z $\mathcal{H}^1(\Omega)$ lze nalézt v [4].

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= -\int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \\
\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} &= 0.
\end{aligned}$$

Tyto dvě rovnice sečteme a členy, které nezávisí na hledaných funkcích \mathbf{u} a p , převedeme na pravou stranu:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2\tau} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(\left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \\
+ \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} = \\
= \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega} \left(4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Pro přehlednější zápis nyní označíme symbolem (\cdot, \cdot) skalární součin na prostoru $\mathcal{L}^2(\Omega)$, tj. $(f, g) = \int_{\Omega} fg \, d\mathbf{x}$, $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Stejným symbolem označíme skalární součin na prostoru $(\mathcal{L}^2(\Omega))^2$ a dále $((\cdot, \cdot))$ bude značit symetrickou bilineární formu na prostoru \mathcal{W} definovanou vztahem

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}.$$

Identitu (3.11) lze nyní napsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \nu ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \\
+ (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

která platí pro všechna $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$ a kde hledané řešení (\mathbf{u}, p) je prvkem prostoru $\mathcal{W} \times \mathcal{Q}$. Zavedme ještě označení

$$\begin{aligned}
a(U^*, U, V) &= \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\left((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\
&+ \nu ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$$f(V) = \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

kde $U^* = (\mathbf{u}^*, p)$, $U = (\mathbf{u}, p) \in \mathcal{W} \times \mathcal{Q}$ a $V = (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$.

Definice: Slabým řešením problému (3.9), (3.10) s okrajovými podmínkami (2.20), (2.21) a (2.22) nazveme dvojici $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) = (\mathbf{u}, p) = U \in \mathcal{W} \times \mathcal{Q}$ splňující vztah

$$a(U, U, V) = f(V) \tag{3.14}$$

pro všechna $V = (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$, kde navíc U splňuje okrajové podmínky

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D(t) \quad \text{na } \Gamma_D, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}|_{\Gamma_{W_t}}(t) \quad \text{na } \Gamma_{W_t} \tag{3.16}$$

ve smyslu stop a $t = t_{n+1}$.

3.2.2 Metoda konečných prvků

Pro aplikaci metody konečných prvků zavedeme vhodné konečně-dimenzionální prostory \mathcal{W}_h , \mathcal{X}_h a \mathcal{Q}_h , aproximující prostory \mathcal{W} , \mathcal{X} a \mathcal{Q} . Nechť

$$\mathcal{X}_h = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{W}_h : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = 0, \mathbf{v}|_{\Gamma_{W_t}} = 0 \}.$$

Definice: Řekneme, že $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$ je přibližné řešení problému (3.14), jestliže platí:

$$a(U_h, U_h, V_h) = f(V_h) \quad \forall V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Q}_h \quad (3.17)$$

a \mathbf{u}_h splňuje vhodnou aproximaci okrajových podmínek na Γ_D a Γ_{W_t} .

Prostory konečných prvků \mathcal{X}_h a \mathcal{Q}_h musí splňovat tzv. Babuškovu-Brezziho podmínku (dále BB-podmínka), která zajišťuje stabilitu schématu:

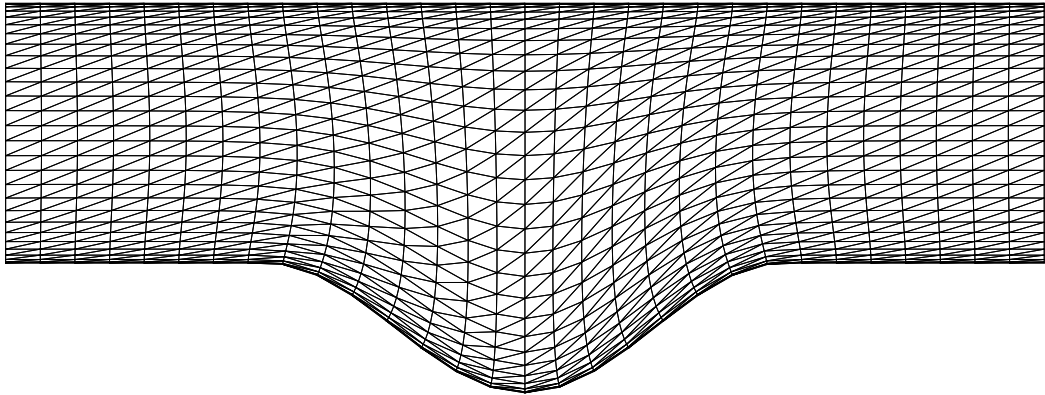
$$\exists c > 0 : \quad \inf_{0 \neq p \in \mathcal{Q}_h} \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in \mathcal{X}_h} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \|p\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} \geq c, \quad (3.18)$$

kde $|\cdot|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ je seminorma na prostoru $\mathcal{H}^1(\Omega)$ definovaná vztahem

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla w_i|^2 d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|^2 d\mathbf{x}.$$

Standardní postup pro zavedení prostorů konečných prvků spočívá v sestrojení triangulace oblasti Ω a uvažování vhodného konečně-dimenzionálního prostoru funkcí na této triangulaci. Nechť Ω je polygonální oblast, tj. oblast, jejíž hranici tvoří po částech lineární křivky. Řekneme, že $\mathcal{T}_h = \{K; K \in \mathcal{T}_h\}$ je triangulace oblasti Ω , jestliže platí:

1. $\forall K \in \mathcal{T}_h : K \subset \bar{\Omega}$ je uzavřený nedegenerovaný trojúhelník,
2. $\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = \bar{\Omega}$,
3. $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h, K_1 \neq K_2 \Rightarrow K_1 \cap K_2 = \emptyset$ nebo K_1, K_2 mají společný právě jeden vrchol nebo K_1, K_2 mají společnou právě jednu stranu,
4. Množina \mathcal{T}_h obsahuje konečně mnoho elementů K .



Obr. 3 - Triangulace \mathcal{T}_h oblasti Ω_t užitá v numerickém experimentu

Nyní aproximujeme prostor \mathcal{Q} prostorem \mathcal{Q}_h :

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ q \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : q|_K \in P^k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

kde $P^k(K)$ je prostor všech polynomů stupně nejvýše k na elementu K . Prostor \mathcal{W} aproximujeme prostorem \mathcal{W}_h , kde

$$\mathcal{W}_h = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{C}(\bar{\Omega}))^2 : \mathbf{v}|_K \in (P^{k+1}(K))^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

tj. $\mathbf{v}|_K = (v_1, v_2)|_K$, kde v_i je polynom stupně nejvýše $k+1$ na K , $i = 1, 2$. Nakonec položíme $\mathcal{X}_h = \mathcal{X} \cap \mathcal{W}_h$. Takto definovaná dvojice prostorů $(\mathcal{X}_h, \mathcal{Q}_h)$ splňuje BB-podmínku. V našich výpočtech používáme tzv. Taylorovy-Hoodovy P_2/P_1 elementy, tj. uvažujeme $k = 1$ v předchozích definicích.

3.3 Stabilizace metody konečných prvků

Důležitou veličinou charakterizující proudění je tzv. Reynoldsovo číslo $Re = UL/\nu$, kde U je charakteristická rychlost (v našem případě průměrná rychlost na vstupu) a L je charakteristická délka (např. délka kanálu). Je-li číslo Re dostatečně malé, je proudění laminární a numerické metody pro jeho řešení jsou dostatečně stabilní. S rostoucím Re se obvykle projeví v přibližném řešení tzv. Gibbsův jev reprezentovaný nefyzikálními oscilacemi. Abychom vzniku těchto oscilací v přibližném řešení $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$ zamezili, používáme metody vedoucí ke stabilizaci diskrétního schématu. V našem případě použijeme SUPG metodu (streamline upwind Petrov-Galerkin), kterou lze v literatuře nalézt také pod názvem “streamline-diffusion method”, tj. metoda proudnicové difúze. Spočívá v přidání stabilizačních členů do naší diskrétní rovnice

$$a(U_h, U_h, V_h) = f(V_h) \quad \forall V_h \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Q}_h.$$

Stabilizační členy definujeme takto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h(U^*, U, V) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p, (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_K, \\ \mathcal{F}_h(V) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}), (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_K, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde $U = (\mathbf{u}, p)$, $U^* = (\mathbf{u}^*, p) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h$, $V = (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Q}_h$, $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}$ je transportní rychlost, $(\cdot, \cdot)_K$ značí skalární součin na prostoru $\mathcal{L}^2(K)$ nebo $(\mathcal{L}^2(K))^2$ a $\delta_K \geq 0$ jsou vhodné parametry.

Dále zavedeme tzv. div-div stabilizaci tlaku pomocí formy

$$\mathcal{P}_h(U, V) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_K, \quad (3.20)$$

kde $U = (\mathbf{u}, p) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h$, $V = (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Q}_h$ a $\tau_K \geq 0$ jsou vhodné parametry.

Stabilizovaný diskrétní problém je poté formulován následovně:

Hledáme dvojici $(\mathbf{u}_h, p_h) = U_h \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h$ takovou, že:

$$a(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{L}_h(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h, V_h) = f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h)$$

pro všechna $V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Q}_h$ (3.21)

a \mathbf{u}_h splňuje vhodnou aproximaci okrajových podmínek na Γ_D a Γ_{W_i} .

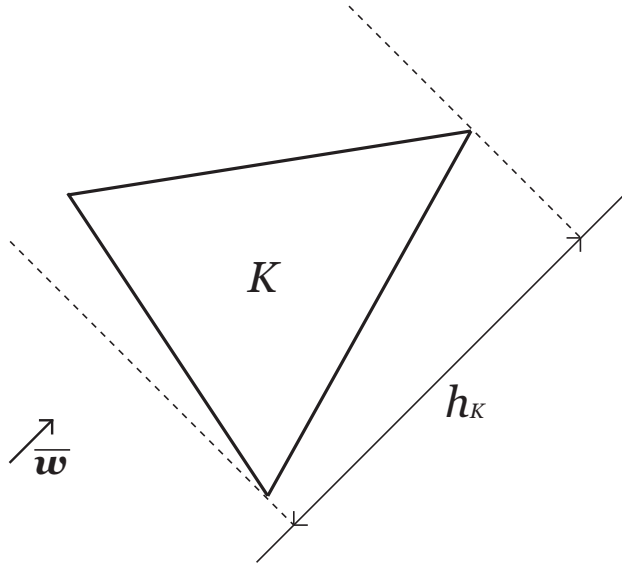
Pro volbu parametrů δ_K a τ_K existuje řada heuristických postupů, nicméně tyto metody pro velká Reynoldsova čísla Re selhávají. Pro vhodnou volbu stabilizačních parametrů je nutno provést velmi komplikovanou teoretickou analýzu. V našem numerickém experimentu volíme tyto parametry podle [3] následujícím způsobem:

$$\delta_K = \delta^* h_K^2, \tag{3.22}$$

kde h_K je velikost elementu K ve směru transportní rychlosti $\bar{\mathbf{w}}$ (viz obr. 4) a $\delta^* \in (0, 1]$ je volitelný parametr,

$$\tau_K = \tau^*,$$

kde $\tau^* \in (0, 1]$ je volitelný parametr.



Obr. 4 - Velikost elementu K ve směru transportní rychlosti $\bar{\mathbf{w}}$.

Kapitola 4

Realizace diskrétního problému

Připomeňme si náš diskrétní problém:

Hledáme $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h$ takové, že

$$a(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{L}_h(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h, V_h) = f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h) \quad (4.1)$$

pro všechna $V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Q}_h$

a $\mathbf{u}_h \in \mathcal{W}_h$ splňuje vhodnou aproximaci okrajových podmínek na Γ_{W_t} a Γ_D . Jako přirozená volba se nabízí požadovat

$$\mathbf{u}_h(P) = \mathbf{u}_D(P, t), \quad t = t_{n+1},$$

pro každý vrchol a každý střed strany P triangulace \mathcal{T}_h ležící na Γ_D ,

$$\mathbf{u}_h(P) = \mathbf{w}^{n+1}(P)$$

pro každý vrchol a každý střed strany P triangulace \mathcal{T}_h ležící na Γ_{W_t} .

4.1 Oseenův problém

Řešení problému (4.1) je obtížné v důsledku nelinearity konvektivních členů vystupujících v Navierových-Stokesových rovnicích. Pro výpočet přibližného řešení je tedy nutné náš diskrétní problém linearizovat. Nelineární člen s konvektivní derivací budeme aproximovat lineárním členem:

$$\left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \approx \left((\hat{\mathbf{u}}^n - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (4.2)$$

nebo

$$\left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \approx \left(((2\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}) - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (4.3)$$

Hledanou rychlost \mathbf{u} nahradíme v konvektivní derivaci rychlostí $\hat{\mathbf{u}}^n$ z předchozí časové vrstvy. Druhá možnost je získána aproximací rychlosti \mathbf{u} na $(n+1)$ -ní časové vrstvě pomocí extrapolace výrazem $2\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}$.

Další možností, jak úlohu (4.1) linearizovat, je použít tzv. Oseenův iterační proces. Nechť $U_h^{(0)}$ je počáteční přiblížení dvojice $(\mathbf{u}_h, p_h) = U_h \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h$ a předpokládejme, že pro nějaké $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ již byla vypočtena l -tá iterace $U_h^{(l)} = (\mathbf{u}_h^{(l)}, p_h^{(l)}) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h$. Pak $(l+1)$ -ní iteraci $U_h^{(l+1)} = (\mathbf{u}_h^{(l+1)}, p_h^{(l+1)}) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h$ definujeme vztahem

$$a(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) + \mathcal{L}_h(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h^{(l+1)}, V_h) = f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h)$$

pro všechna $V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Q}_h$. (4.4)

Jako počáteční přiblížení $U_h^{(0)}$ volíme buď hodnoty na přechozí časové vrstvě:

$$U_h^{(0)} = (\mathbf{u}_h^{(0)}, p_h^{(0)}) = (\hat{\mathbf{u}}^n, \hat{p}^n),$$

nebo extrapolaci hodnot na předchozích dvou časových vrstvách:

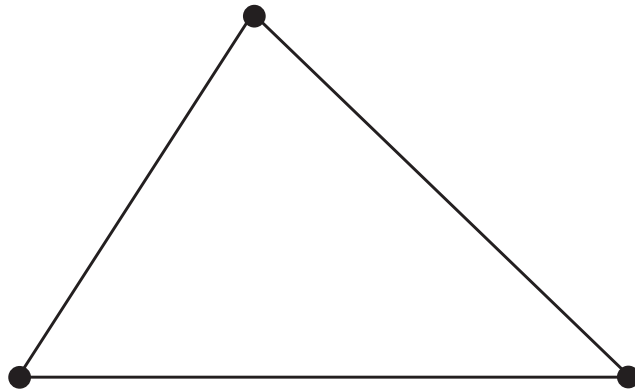
$$U_h^{(0)} = (\mathbf{u}_h^{(0)}, p_h^{(0)}) = (2\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, 2\hat{p}^n - \hat{p}^{n-1}).$$

Odstraněním nelinearity v konvektivních členech schématu (4.1) jsme zajistili, že problém (4.4) je lineární. Numerické výsledky ukazují, že pro získání dostatečně přesného řešení stačí spočítat pouze několik Oseenových iterací. Všimněme si, že užití aproximací (4.2) a (4.3) odpovídá Oseenově metodě, v níž vypočteme pouze jednu iteraci.

4.2 Řešení linearizovaného Oseenova problému

Pro převedení úlohy (4.4) do tvaru soustavy lineárních rovnic potřebujeme nejprve zkonstruovat báze konečně-dimenzionálních prostorů \mathcal{X}_h a \mathcal{Q}_h . Pro konstrukci báze prostoru \mathcal{Q}_h označme a_m , $m = 1, \dots, S$, všechny vrcholy dané triangulace \mathcal{T}_h . Každá funkce $q \in \mathcal{Q}_h$ je na elementu $K \in \mathcal{T}_h$ jednoznačně určena svými hodnotami ve vrcholech (viz obr. 5). Jako bázové prvky prostoru \mathcal{Q}_h proto zvolíme funkce q_k^* , $k = 1, \dots, S$, takové, že

$$q_k^*(a_m) = \delta_{km}, \quad k, m = 1, \dots, S.$$



Obr. 5 - Stupně volnosti funkce $p \in \mathcal{Q}_h$ na elementu $K \in \mathcal{T}_h$.

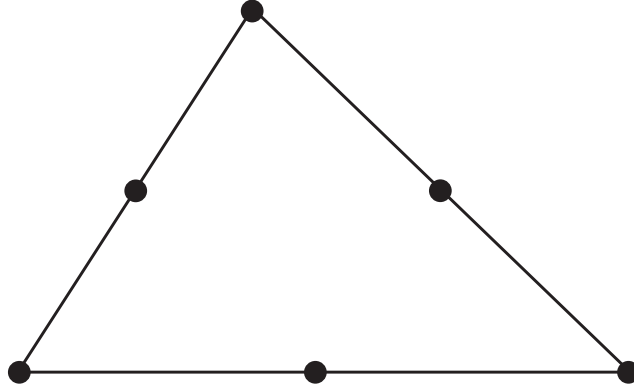
Bázi prostoru \mathcal{X}_h konstruujeme podobným způsobem. Můžeme psát $\mathcal{X}_h = \mathcal{Y}_h \times \mathcal{Y}_h$, kde $\mathcal{Y}_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P^{k+1}(K) \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_{\Gamma_D} = 0, v|_{\Gamma_{W_t}} = 0\}$. Řekněme, že bod $b \in \Omega$ je uzel triangulace \mathcal{T}_h , je-li b vrchol nějakého elementu $K \in \mathcal{T}_h$ nebo je-li b střed strany E nějakého elementu $K \in \mathcal{T}_h$. Vrcholy a středy stran $b \in \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ ležící na $\partial\Omega$ mezi uzly nezahrnujeme. Označme $b_i, i = 1, \dots, L$, všechny uzly dané triangulace \mathcal{T}_h . Jelikož funkce $v \in \mathcal{Y}_h$ je na každém elementu $K \in \mathcal{T}_h$ určena jednoznačně svými hodnotami ve vrcholech a středech stran (viz obr. 6), lze bázi $\{v_i^*\}_{i=1}^L$ volit tak, aby byl splněn vztah

$$v_i^*(b_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, L.$$

Bázi prostoru \mathcal{X}_h poté zkonstruujeme snadno pomocí bázevých prvků prostoru \mathcal{Y}_h . Necht' $N = 2L$, pak bázi $\{\mathbf{w}_i^*\}_{i=1}^N$ prostoru \mathcal{X}_h definujeme předpisem

$$\mathbf{w}_i^* = (v_i^*, 0), \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\mathbf{w}_i^* = (0, v_{i-L}^*), \quad i = L + 1, \dots, N.$$



Obr. 6 - Stupně volnosti funkce $v \in \mathcal{Y}_h$ na elementu $K \in \mathcal{T}_h$.

Dále necht' $\mathbf{u}_h^* \in \mathcal{W}_h$ je funkce realizující vhodnou aproximaci okrajových podmínek. Zvolme ji následujícím způsobem:

$$\mathbf{u}_h^*(P) = \mathbf{u}_D(P, t), \quad t = t_{n+1},$$

pro vrcholy a středy stran $P \in \Gamma_D$ triangulace \mathcal{T}_h ,

$$\mathbf{u}_h^*(P) = \mathbf{w}^{n+1}(P)$$

pro vrcholy a středy stran $P \in \Gamma_{W_t}$ triangulace \mathcal{T}_h ,

$$\mathbf{u}_h^*(P) = 0 \quad \text{jinak.}$$

Potom hledáme řešení $U_h^{(l+1)} = (\mathbf{u}_h^{(l+1)}, p_h^{(l+1)})$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^{(l+1)} &= \mathbf{u}_h^* + \sum_{j=1}^N U_j \mathbf{w}_j^*, \\ p_h^{(l+1)} &= \sum_{m=1}^S P_m q_m^*, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde U_j, P_m jsou reálná čísla, $j = 1, \dots, N, m = 1, \dots, S$.

Za testovací funkce stačí dosazovat vzhledem k linearitě forem v Oseenově schématu vzhledem k testovacím funkcím pouze bázové funkce prostoru \mathcal{X}_h resp. \mathcal{Q}_h . Dosazením testovací funkce $V_h = (\mathbf{w}_i^*, q_k^*), i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, S$ a vztahů (4.5) do rovnice (4.4) získáme:

$$\begin{aligned} a(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) &= \frac{3}{2\tau} \sum_{j=1}^N (\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) U_j + \nu \sum_{j=1}^N ((\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*)) U_j + \\ &+ \sum_{j=1}^N \left((\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^* \right) U_j - \sum_{m=1}^S (q_m^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*) P_m + \sum_{j=1}^N (\operatorname{div} \mathbf{w}_j^*, q_k^*) U_j + \\ &+ \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*) + \nu ((\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*)) + \left((\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^* \right) + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^*, q_k^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) &= \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left[\sum_{j=1}^N \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{w}_j^* - \nu \Delta \mathbf{w}_j^* + (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K U_j \right] + \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left[\sum_{m=1}^S \left(\nabla q_m^*, (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K P_m \right] + \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{u}_h^* - \nu \Delta \mathbf{u}_h^* + (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K, \end{aligned}$$

$$f(V_h) = \frac{1}{2\tau} \left(4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{w}_i^* \right) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{w}_i^* \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

$$\mathcal{F}_h(V_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}), (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K$$

a

$$\mathcal{P}_h(U_h^{(l+1)}, V_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \left(\left[\sum_{j=1}^N (\operatorname{div} \mathbf{w}_j^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*)_K U_j \right] + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*)_K \right),$$

kde $\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} = (\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1})$.

Označíme-li

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{3}{2\tau} (\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) + \nu ((\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*)) + \left((\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^* \right) + \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{w}_j^* - \nu \Delta \mathbf{w}_j^* + (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K + \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\operatorname{div} \mathbf{w}_j^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*)_K, \end{aligned}$$

$$b_{im} = -(q_m^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*),$$

$$\begin{aligned}
c_{im} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\nabla q_m^*, (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K, \\
F_i &= \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{w}_i^*) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_i^* dS + \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}), (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K - \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{u}_h^* - \nu \Delta \mathbf{u}_h^* + (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, (\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K - \\
&\quad - \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*) + \nu ((\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*)) + \\
&\quad + \left((\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^* \right) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*)_K
\end{aligned}$$

a

$$G_k = (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^*, q_k^*),$$

kde opět $\overline{\mathbf{w}}_h^{(l)} = (\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1})$, získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámé $U_j, j = 1, \dots, N, P_m, m = 1, \dots, S$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j + \sum_{m=1}^S (b_{im} + c_{im}) P_m &= F_i, \quad i = 1, \dots, N, \\
\sum_{j=1}^N b_{jk} U_j &= G_k, \quad k = 1, \dots, S.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Označíme-li

$$U = (U_1, \dots, U_N)^T,$$

$$P = (P_1, \dots, P_S)^T,$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^N,$$

$$\mathbf{B} = (b_{im})_{i=1, \dots, N, m=1, \dots, S},$$

$$\mathbf{C} = (c_{im})_{i=1, \dots, N, m=1, \dots, S},$$

$$F = (F_1, \dots, F_N)^T,$$

$$G = (G_1, \dots, G_S)^T,$$

můžeme vzniklou soustavu lineárních rovnic (4.6) zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} + \mathbf{C} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Kapitola 5

Numerický experiment

5.1 Konstrukce ALE zobrazení

Připomeňme, že referenční (ALE) souřadnice $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ volíme jako kartézské souřadnice v čase $t = 0$. ALE zobrazení \mathcal{A}_t přiřazuje v čase t každému bodu $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}_0$ bod $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{A}_t(\mathbf{X}) \in \bar{\Omega}_t$. V našem případě položíme $x_1 = X_1$ pro všechna $t \in [0, T]$ a všechna $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \bar{\Omega}_0$, což znamená, že souřadnice x_1 se v čase nemění.

Předpokládejme, že vstup je úsečkou, která je částí přímky $X_1 = a$ a výstup je rovněž úsečkou, která je částí přímky $X_1 = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dále nechť je pohyb stěn v závislosti na čase dán funkcemi

$$x_2 = \phi(X_1, t), \quad X_1 \in [a, b], t \in [0, T] \quad (\text{horní stěna}),$$

$$x_2 = \varphi(X_1, t), \quad X_1 \in [a, b], t \in [0, T] \quad (\text{dolní stěna}),$$

kde $\phi(X_1, t) > \varphi(X_1, t)$ pro všechna $X_1 \in [a, b], t \in [0, T]$. Nechť ϕ a φ jsou hladké funkce, tj. $\phi, \varphi \in \mathcal{C}^1([a, b] \times [0, T])$.

Transformaci souřadnice x_2 volíme tak, že je její změna lineární, tj. použijeme zobrazení definované vztahem

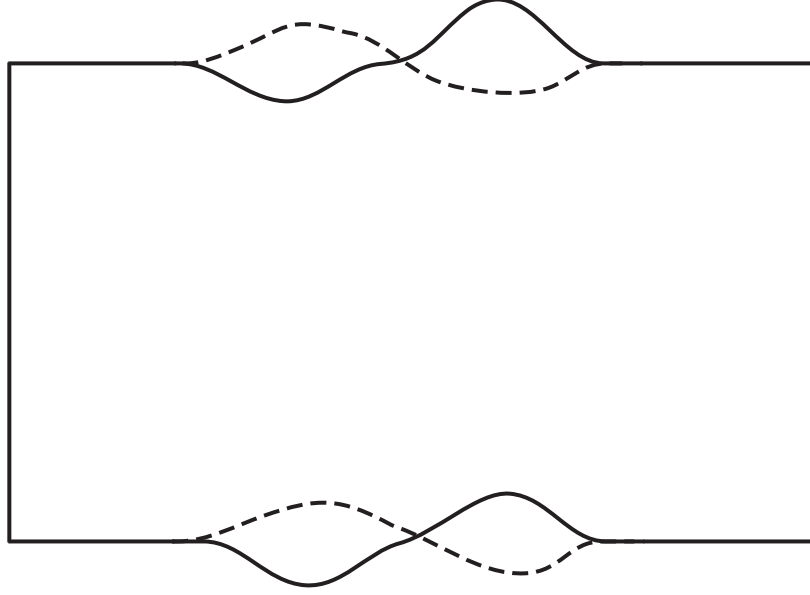
$$x_2(\mathbf{X}, t) = \varphi(X_1, t) + \frac{X_2 - \varphi(X_1, 0)}{\phi(X_1, 0) - \varphi(X_1, 0)}(\phi(X_1, t) - \varphi(X_1, t)). \quad (5.1)$$

Inverzní ALE zobrazení $\mathcal{A}_t^{-1} : \bar{\Omega}_t \rightarrow \bar{\Omega}_0$ získáme z předchozího vztahu snadno díky vlastnosti $x_1 = X_1$:

$$X_1 = \left(\mathcal{A}_t^{-1}(x_1, x_2) \right)_1 = X_1(x_1, x_2, t) = x_1,$$

$$X_2 = \left(\mathcal{A}_t^{-1}(x_1, x_2) \right)_2 = X_2(x_1, x_2, t) = (x_2 - \varphi(x_1, t)) \frac{\phi(x_1, 0) - \varphi(x_1, 0)}{\phi(x_1, t) - \varphi(x_1, t)} + \varphi(x_1, 0) \quad (5.2)$$

pro všechna $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_t$ a všechna $t \in [0, T]$.



Obr. 7 - Kanál s pohyblivými stěnami

———— Kanál v čase $t = 0$
 - - - - - Změna kanálu v čase $t > 0$

5.2 Rychlost ALE zobrazení

V Kapitole 2 jsme definovali rychlost ALE zobrazení vyjádřenou vzhledem k referenčním souřadnicím $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}_0$ předpisem

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_t(\mathbf{X}), \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_0 \quad (5.3)$$

a následně také vzhledem k prostorovým souřadnicím $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_t$ vztahem

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_t. \quad (5.4)$$

Nyní můžeme tyto vztahy dále upravit. Protože první složka našeho ALE zobrazení \mathcal{A}_t nezávisí na časové proměnné, platí:

$$\tilde{w}_1(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} X_1 = 0.$$

Dále ze vztahu (5.1) získáme

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(X_1, t) + \frac{X_2 - \varphi(X_1, 0)}{\phi(X_1, 0) - \varphi(X_1, 0)} (\phi(X_1, t) - \varphi(X_1, t)) \right) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X_1, t) + \frac{X_2 - \varphi(X_1, 0)}{\phi(X_1, 0) - \varphi(X_1, 0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(X_1, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X_1, t) \right). \end{aligned}$$

Pomocí (5.2) a (5.4) snadno vyjádříme rychlost ALE zobrazení v prostorových souřadnicích:

$$\begin{aligned} w_1(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ w_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_1, t) + \frac{x_2 - \varphi(x_1, t)}{\phi(x_1, t) - \varphi(x_1, t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_1, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_1, t) \right). \end{aligned}$$

5.3 Formulace numerického experimentu

5.3.1 Výpočetní oblast

V našich numerických experimentech použijeme následující funkce a parametry, určující výpočetní oblast Ω_t :

$$a = -2, \quad b = 2,$$

$$\varphi(X_1, t) = \alpha \sin t (\cos(\pi X_1) + 1), \quad X_1 \in [-1, 1], \quad t \in [0, T],$$

$$\varphi(X_1, t) = 0, \quad X_1 \in [-2, -1) \cup (1, 2], \quad t \in [0, T],$$

$$\phi(X_1, t) = 1, \quad X_1 \in [-2, 2], \quad t \in [0, T],$$

kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ je parametr udávající velikost deformace dolní stěny. Pro $\alpha = \frac{1}{2}$ by došlo pro $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ k uzavření kanálu, což by nám neumožnilo použít předpoklad nestlačitelnosti našeho proudění.

Z uvedených vztahů snadno vypočteme časové derivace funkcí ϕ a φ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(X_1, t) = 0 \quad \forall X_1 \in [-2, 2], \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(X_1, t) = 0 \quad \forall X_1 \in [-2, -1) \cup (1, 2], \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(X_1, t) = \alpha \cos t (\cos(\pi X_1) + 1) \quad \forall X_1 \in [-1, 1], \quad t \in [0, T].$$

Vidíme, že funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ je spojitá na svém definičním oboru. Jelikož funkce ϕ a φ nezávisí na druhé referenční souřadnici X_2 , stačí nám pro ověření hladkosti ALE zobrazení vyšetřit spojitost funkcí $\frac{\partial \phi}{\partial X_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_1}(X_1, t) = 0 \quad \forall X_1 \in [-2, 2], \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}(X_1, t) = 0 \quad \forall X_1 \in [-2, -1) \cup (1, 2], \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}(X_1, t) = -\alpha \pi \sin t \sin(\pi X_1) \quad \forall X_1 \in [-1, 1], \quad t \in [0, T].$$

Z těchto výpočtů plyne, že ALE zobrazení je třídy $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_0 \times [0, T])$.

5.3.2 Vazkost, tlak, počáteční a okrajové podmínky

Pro numerický experiment jsme zvolili parametry tímto způsobem:

$$p_{ref} = 0 \quad (\text{referenční kinematický tlak})$$

$$u_0(\mathbf{X}) = (1, 0) \quad \text{pro všechna } \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (\text{počáteční podmínka})$$

$$u_D(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} (1, 0), & \text{pokud } X_1 = -2 \\ (0, 0), & \text{jinak.} \end{cases} \quad (\text{Dirichletova okrajová podmínka na } \Gamma_D)$$

$$\tau = 0.01 \quad (\text{velikost časového kroku při diskretizaci})$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad (\text{parametr určující výpočetní oblast}).$$

Velikost *kinematické vazkosti* ν jsme uvažovali ve dvou různých hodnotách:

$$\nu = 0.01$$

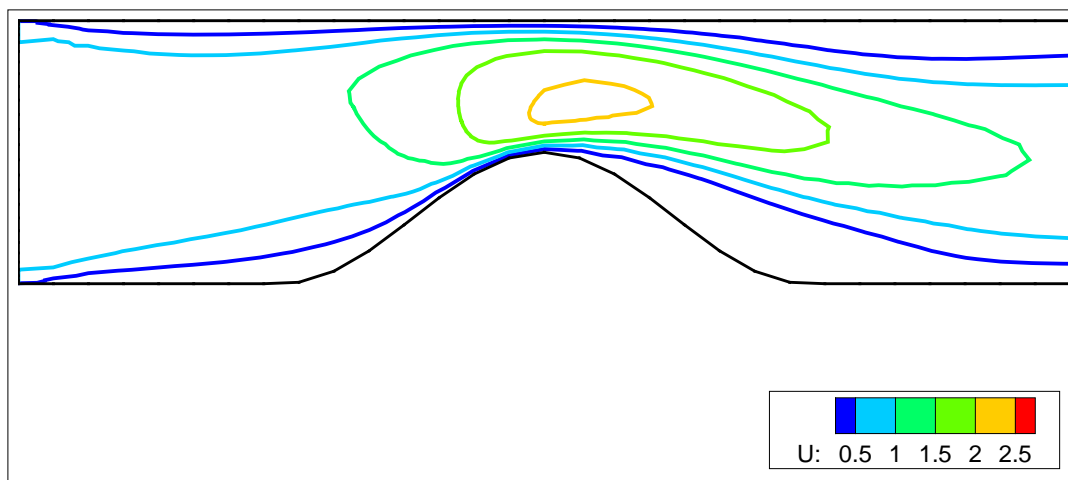
resp.

$$\nu = 0.001.$$

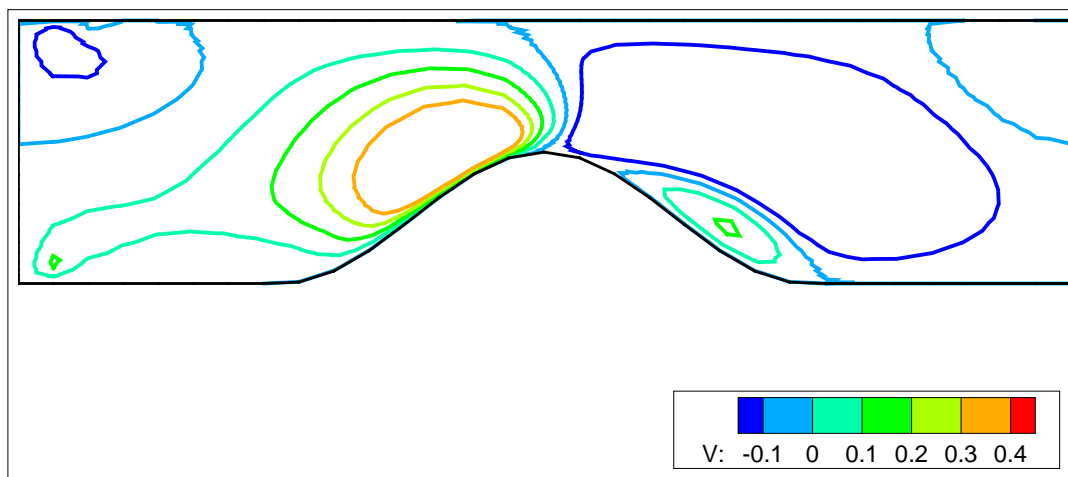
Při takto zvolených parametrech numerického experimentu je výpočet řešení relativně rychlý, lze totiž použít poměrně hrubou výpočetní síť z důvodu velké vazkosti, a tedy malého Reynoldsova čísla řádu $10^2 - 10^3$. Při velikosti kinematické vazkosti $\nu = 0.01$ je proudění laminární, při výpočtech s kinematickou vazkostí $\nu = 0.001$ již dochází k tvorbě vírů v oblasti za “hrbem” a před výstupem z kanálu. Animace vývoje jednotlivých veličin v čase jsou k dispozici na přiloženém nosiči CD.

5.4 Výsledky

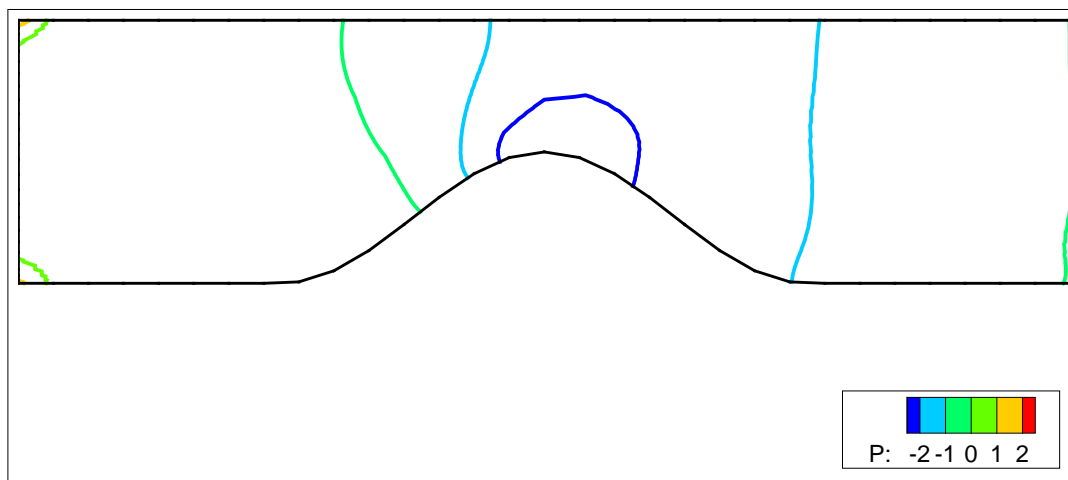
Následující obrázky ukazují rozložení funkčních hodnot hledaných veličin u a p :



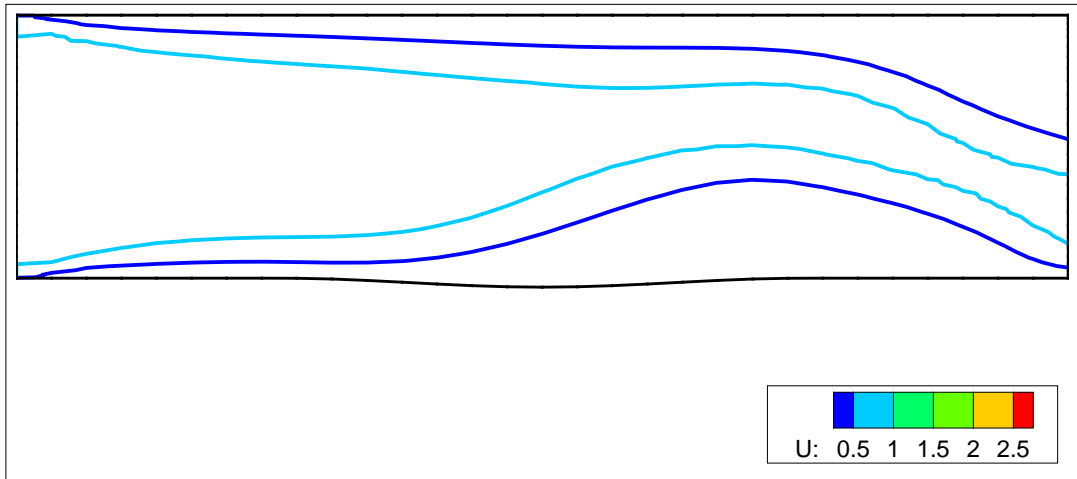
Obr. 8 - Čas $t = 1.7$, první složka vektoru rychlosti u



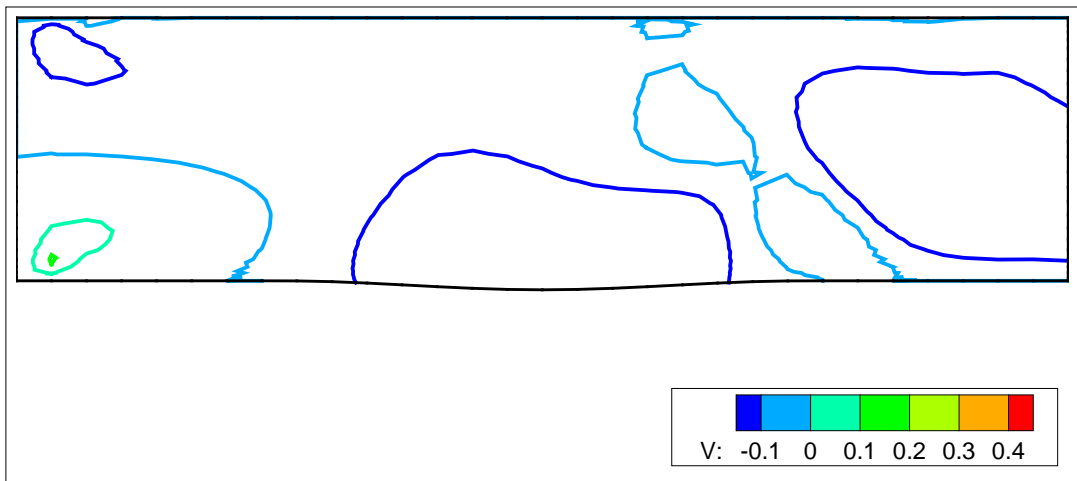
Obr. 9 - Čas $t = 1.7$, druhá složka vektoru rychlosti u



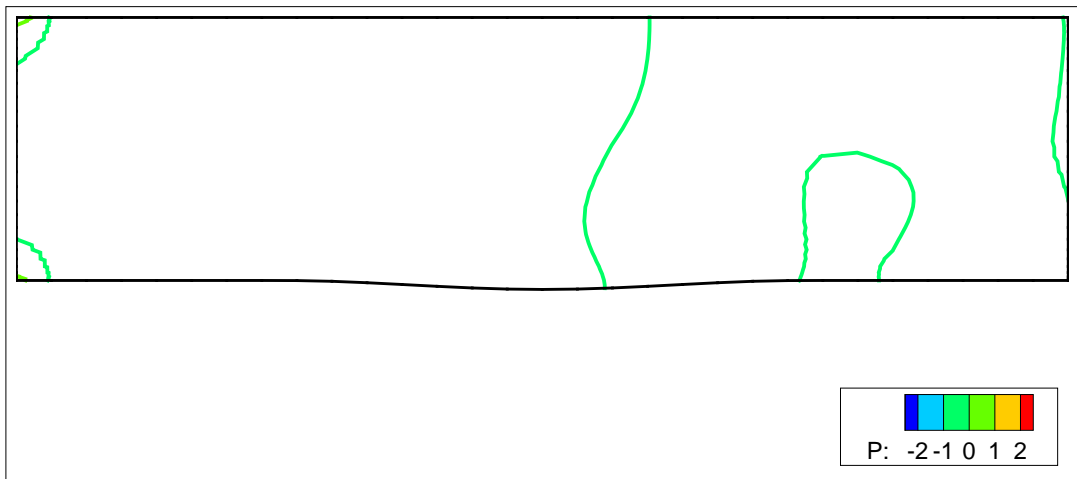
Obr. 10 - Čas $t = 1.7$, kinematický tlak p



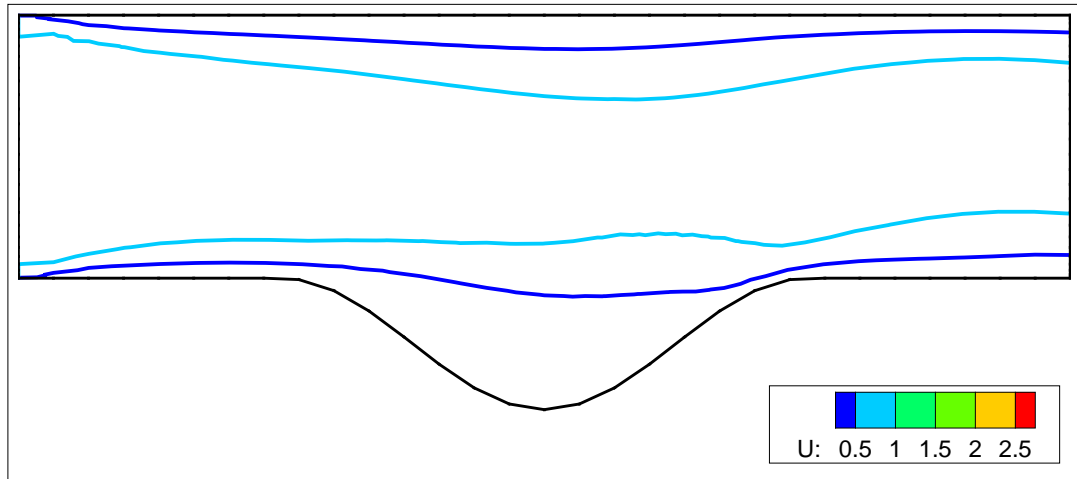
Obr. 11 - Čas $t = 3.3$, první složka vektoru rychlosti u



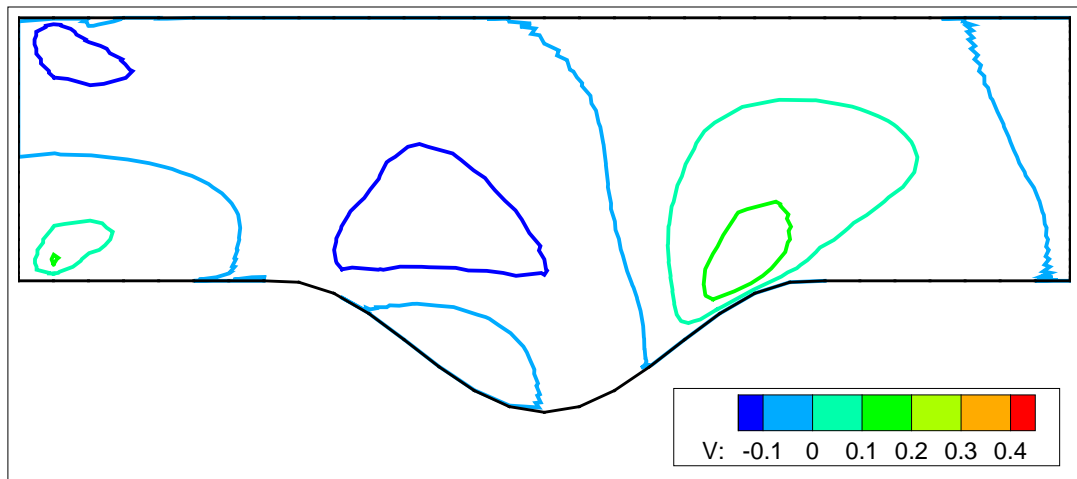
Obr. 12 - Čas $t = 3.3$, druhá složka vektoru rychlosti u



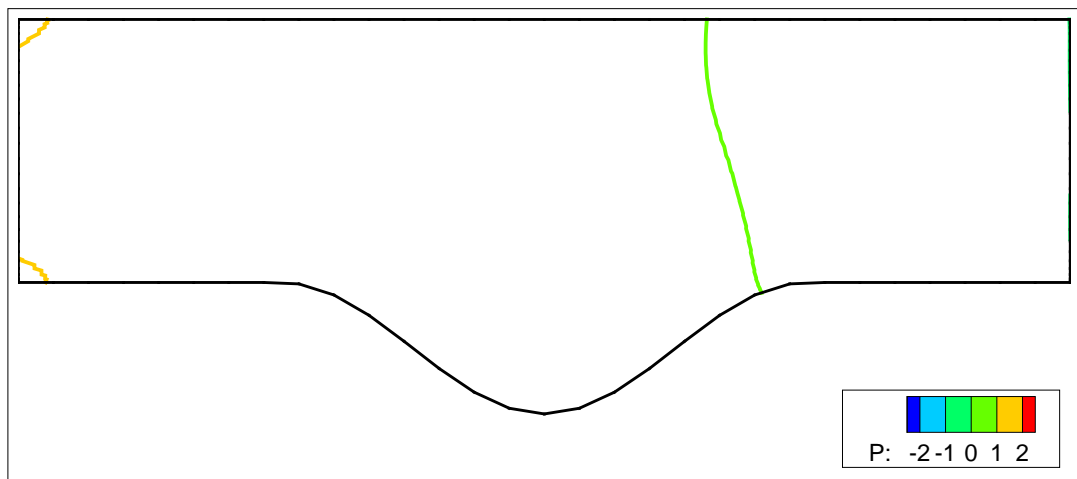
Obr. 13 - Čas $t = 3.3$, kinematický tlak p



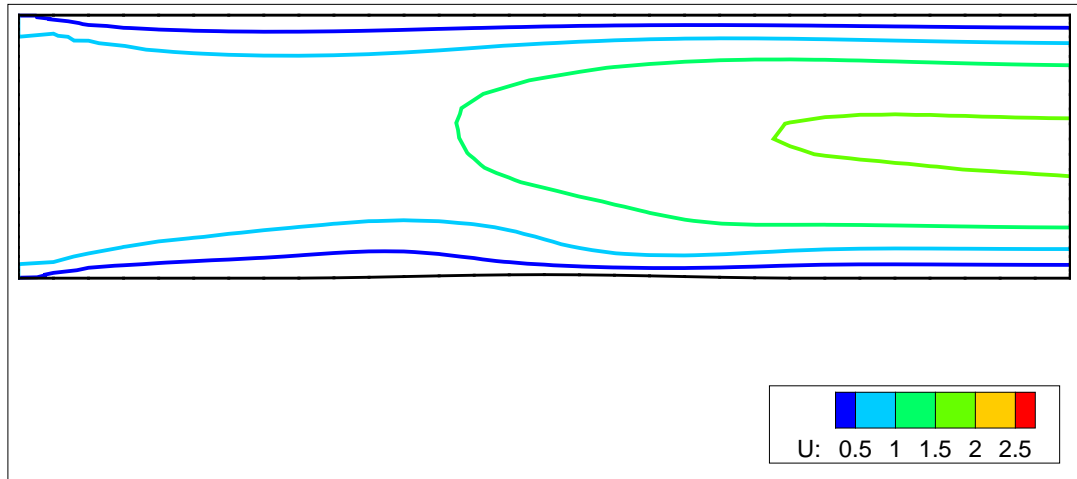
Obr. 14 - Čas $t = 4.8$, první složka vektoru rychlosti u



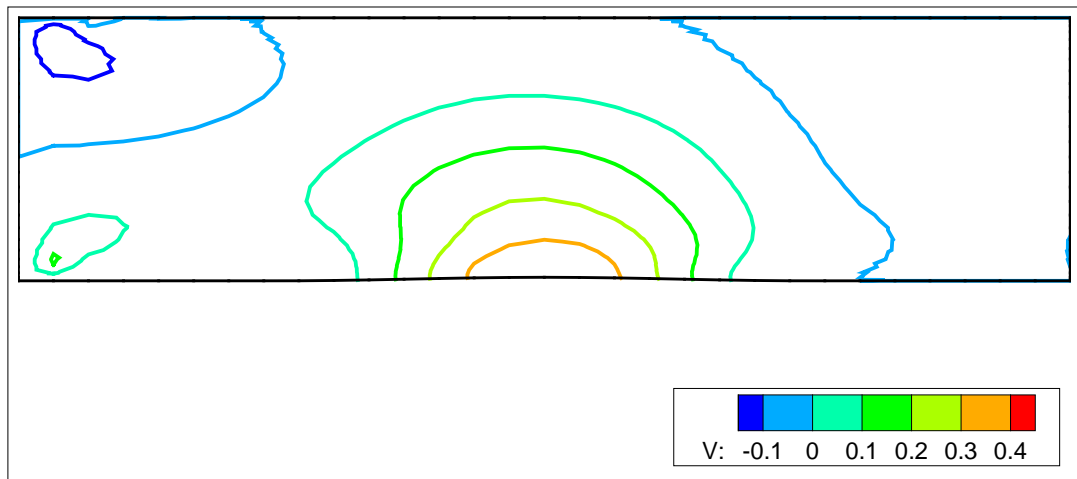
Obr. 15 - Čas $t = 4.8$, druhá složka vektoru rychlosti u



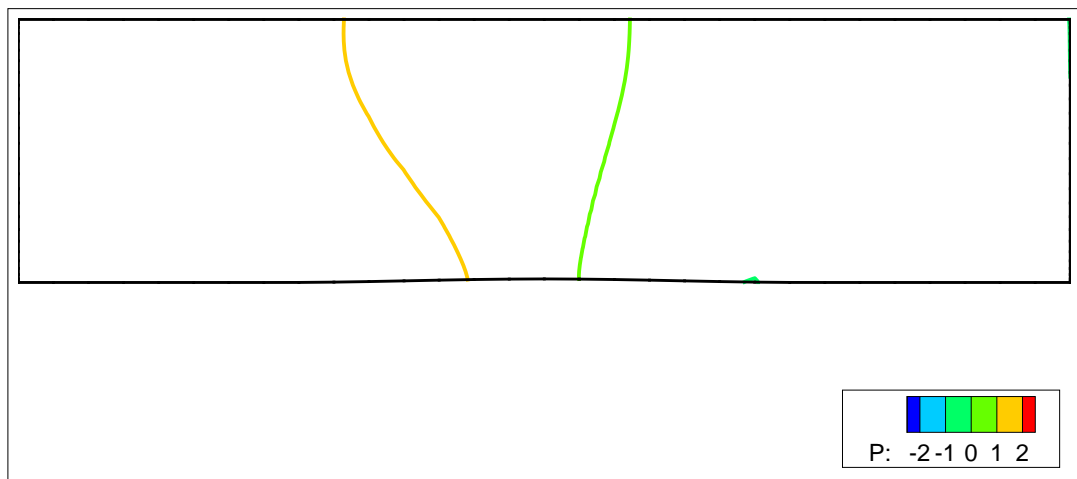
Obr. 16 - Čas $t = 4.8$, kinematický tlak p



Obr. 17 - Čas $t = 6.4$, první složka vektoru rychlosti \mathbf{u}

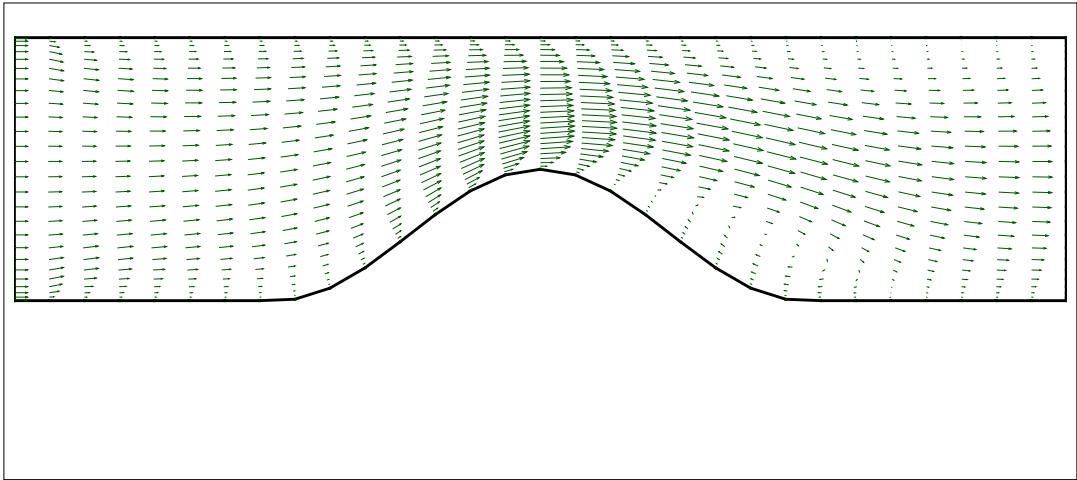


Obr. 18 - Čas $t = 6.4$, druhá složka vektoru rychlosti \mathbf{u}

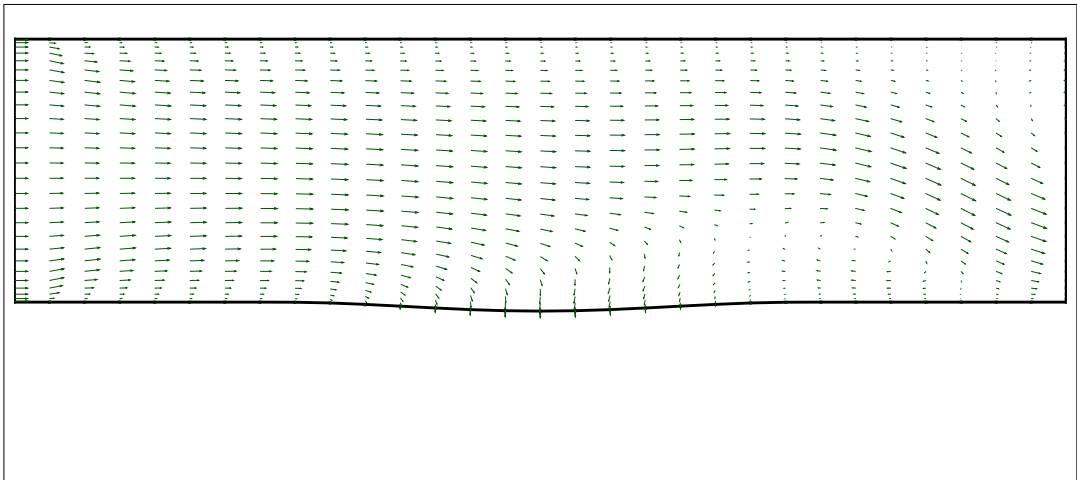


Obr. 19 - Čas $t = 6.4$, kinematický tlak p

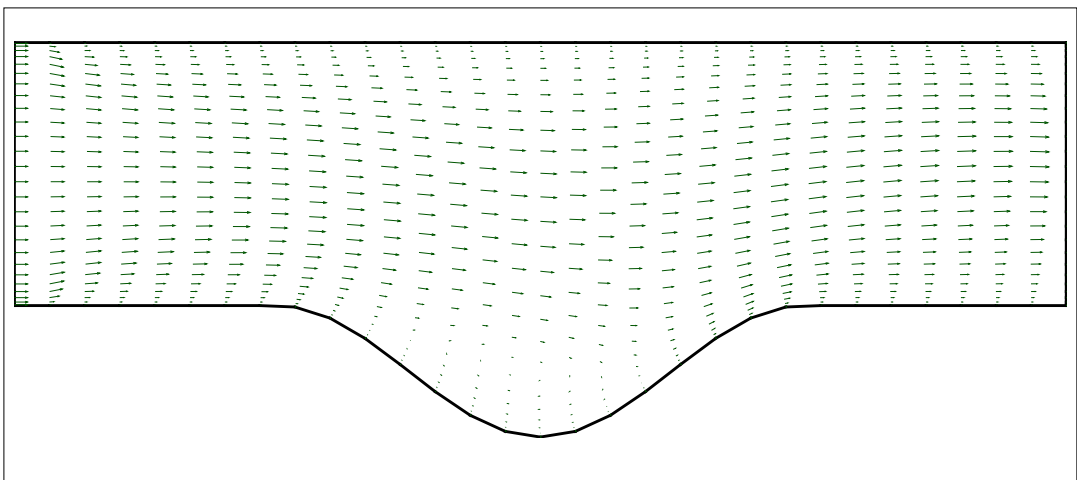
Názorněji lze vidět výsledné hodnoty rychlosti tekutiny \mathbf{u} na vektorovém diagramu:



Obr. 20 - Čas $t = 1.7$, vektor rychlosti \mathbf{u}

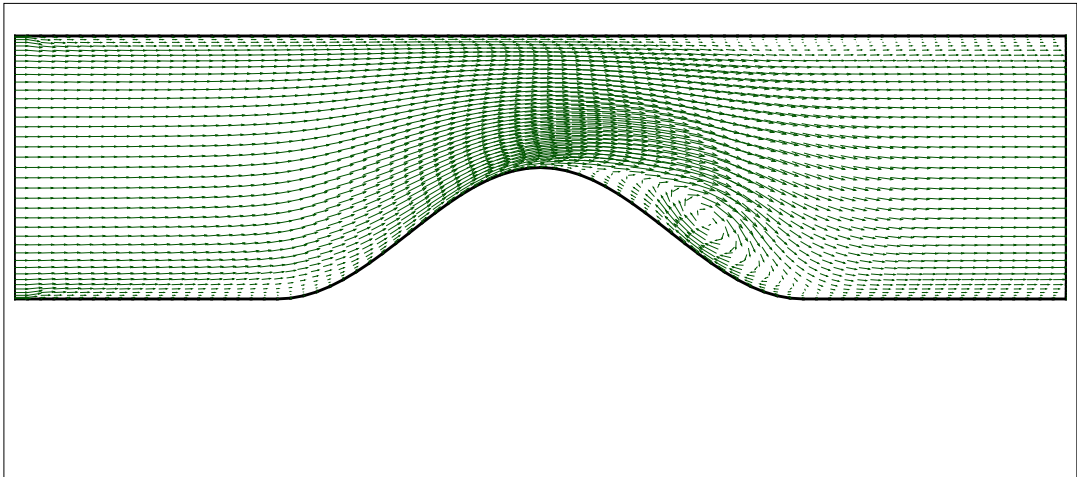


Obr. 21 - Čas $t = 3.3$, vektor rychlosti \mathbf{u}

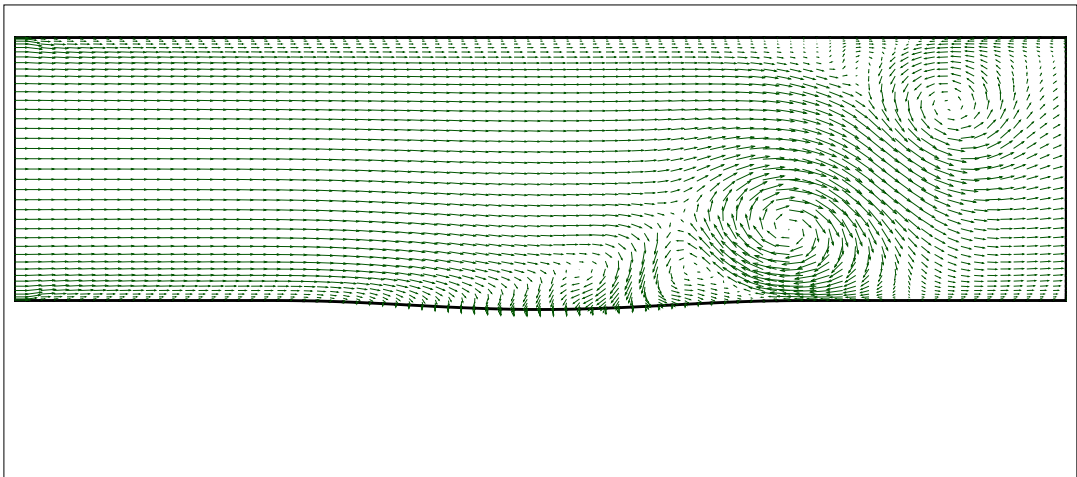


Obr. 22 - Čas $t = 4.8$, vektor rychlosti \mathbf{u}

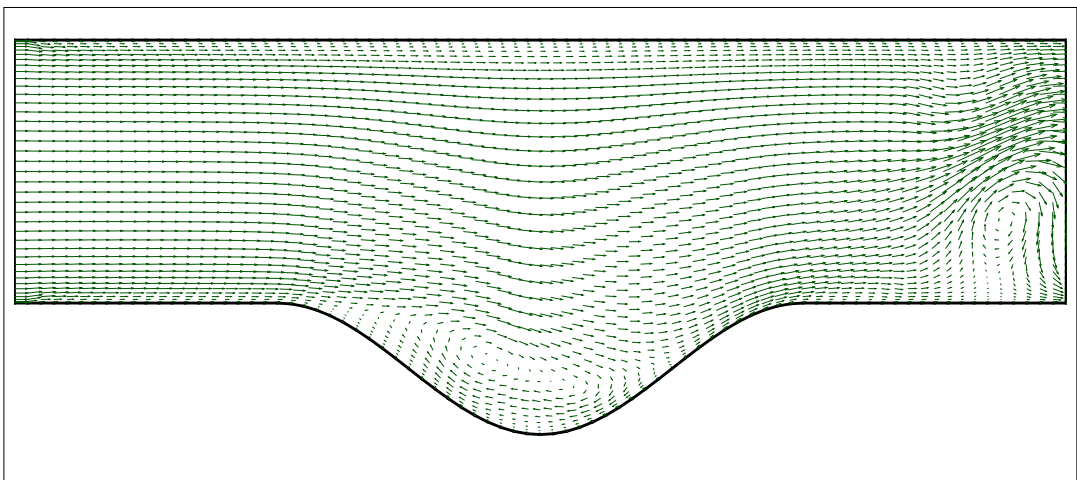
Výsledky po změně kinematické vazkosti na hodnotu $\nu = 0.001$ a zjemnění výpočetní sítě ukazují výskyt vírů v oblasti za “hrbem” a u výstupu z výpočetní oblasti.



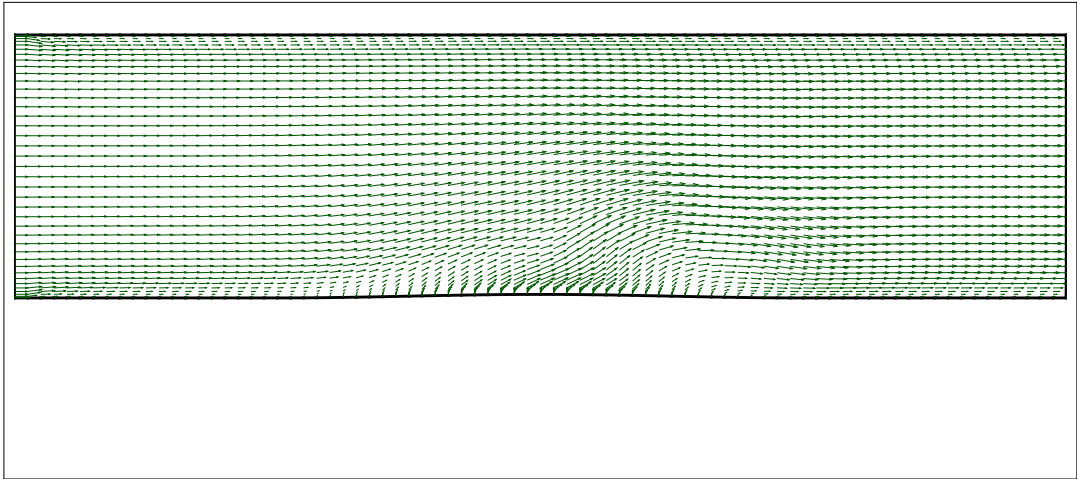
Obr. 23 - Čas $t = 1.7$, vektor rychlosti u



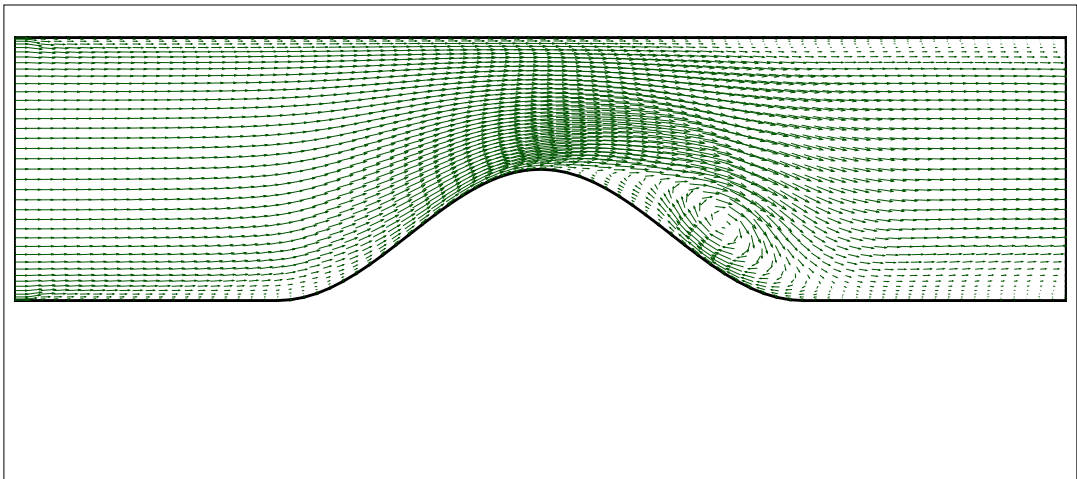
Obr. 24 - Čas $t = 3.3$, vektor rychlosti u



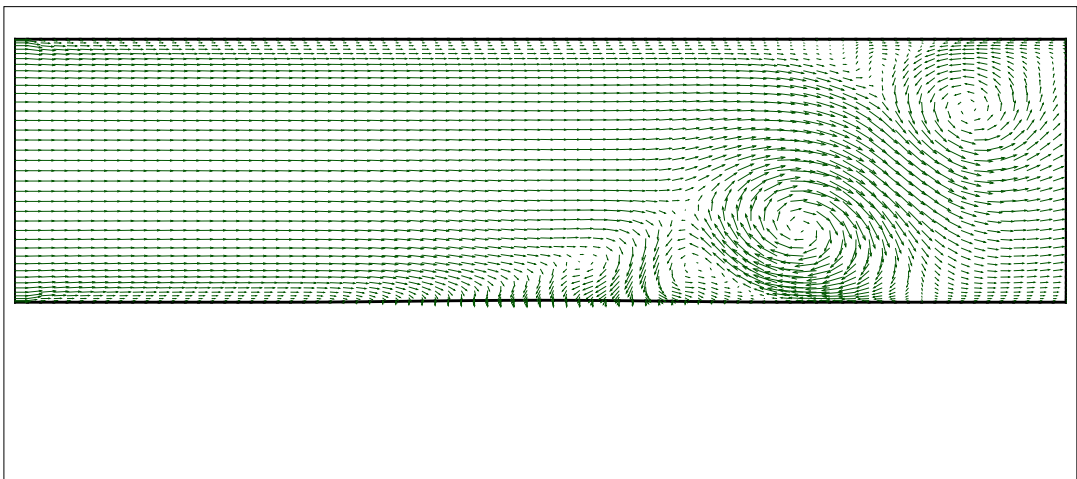
Obr. 25 - Čas $t = 4.8$, vektor rychlosti u



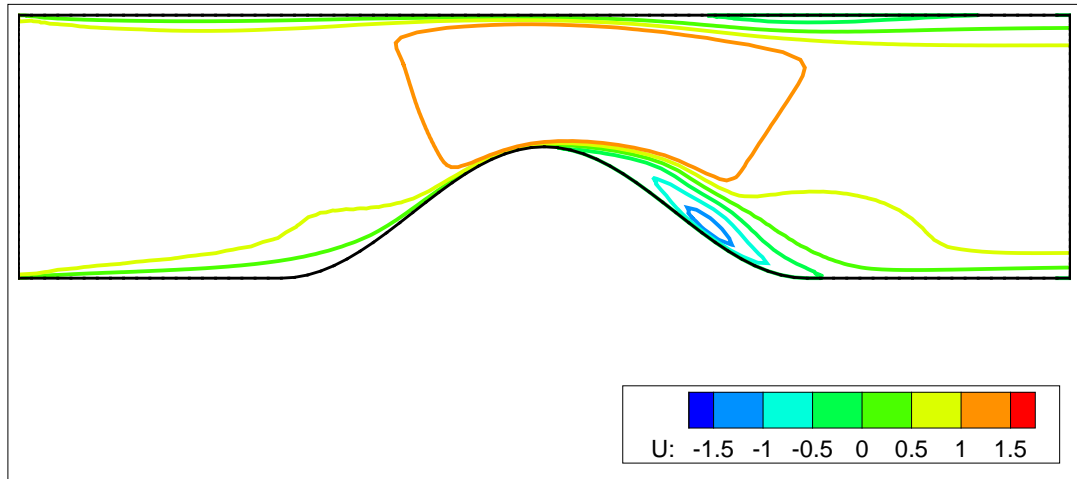
Obr. 26 - Čas $t = 6.4$, vektor rychlosti u



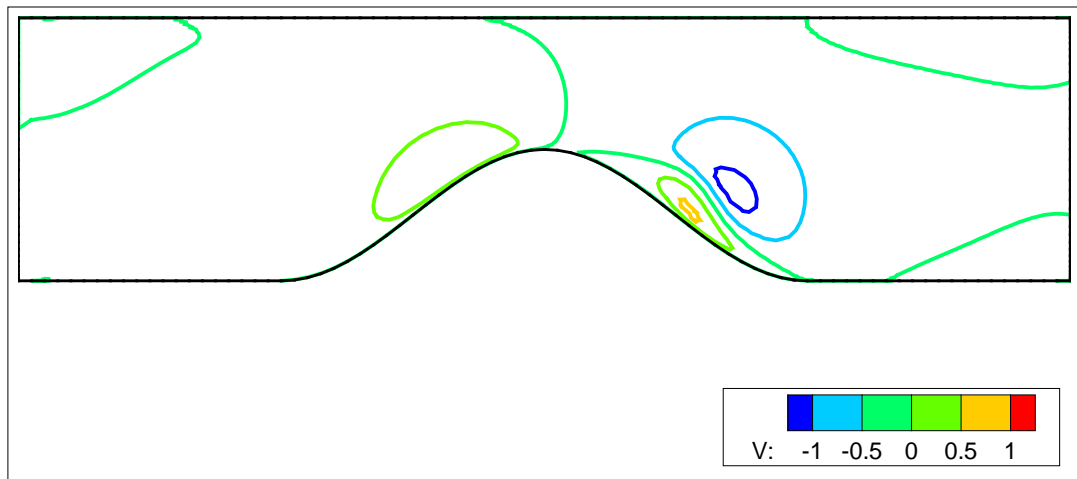
Obr. 27 - Čas $t = 8.0$, vektor rychlosti u



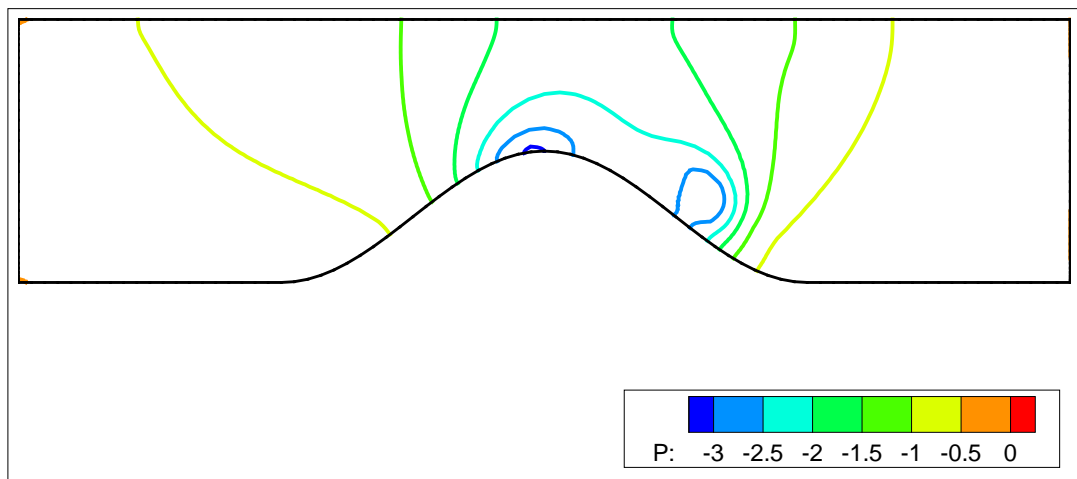
Obr. 28 - Čas $t = 9.5$, vektor rychlosti u



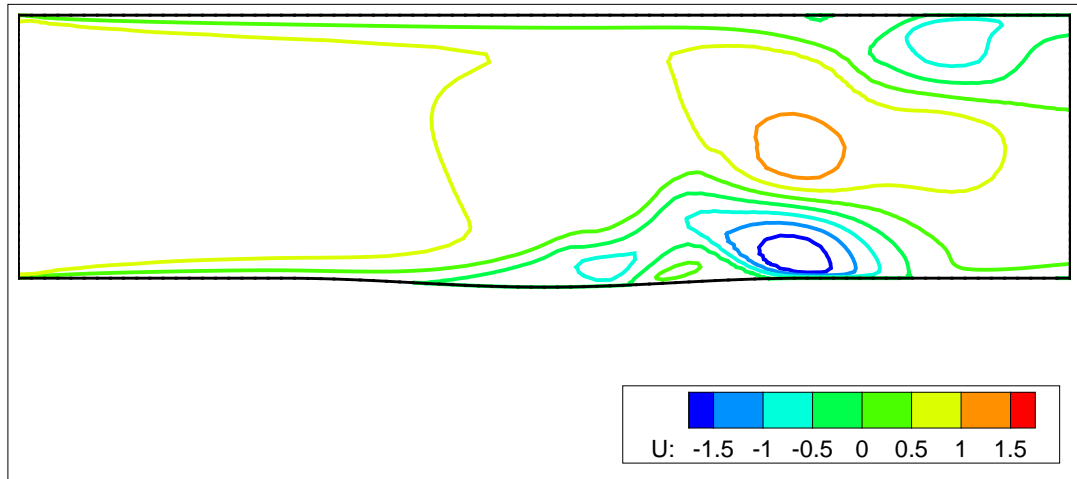
Obr. 29 - Čas $t = 1.7$, první složka vektoru rychlosti u



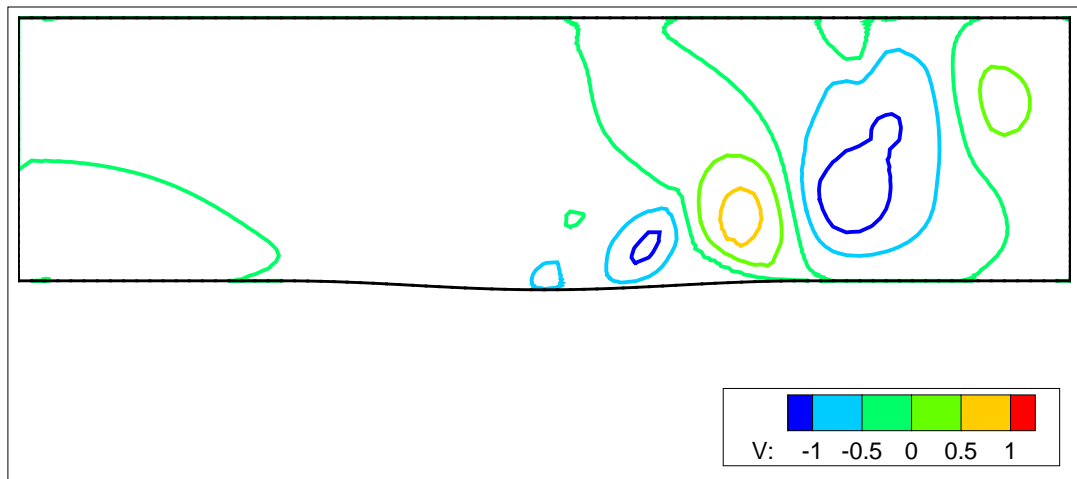
Obr. 30 - Čas $t = 1.7$, druhá složka vektoru rychlosti v



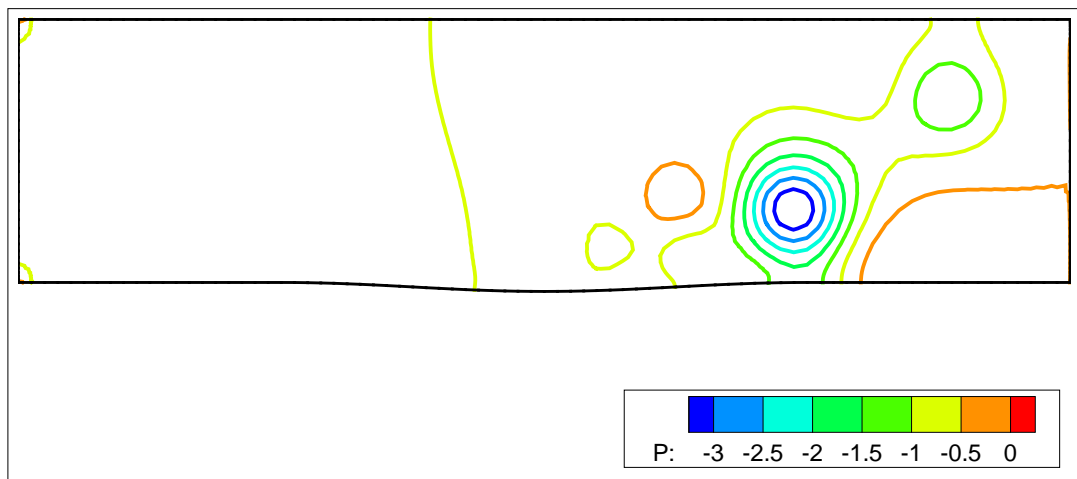
Obr. 31 - Čas $t = 1.7$, kinematický tlak p



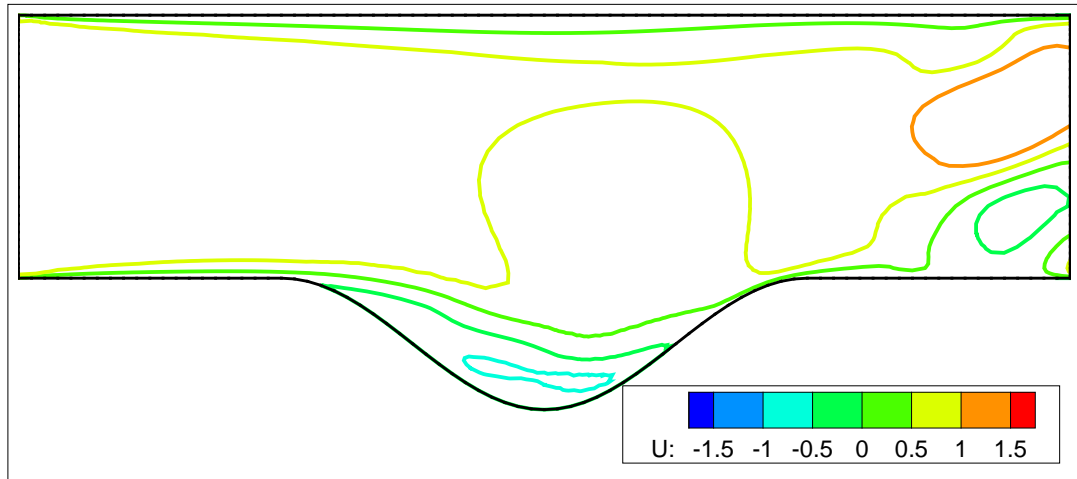
Obr. 32 - Čas $t = 3.3$, první složka vektoru rychlosti u



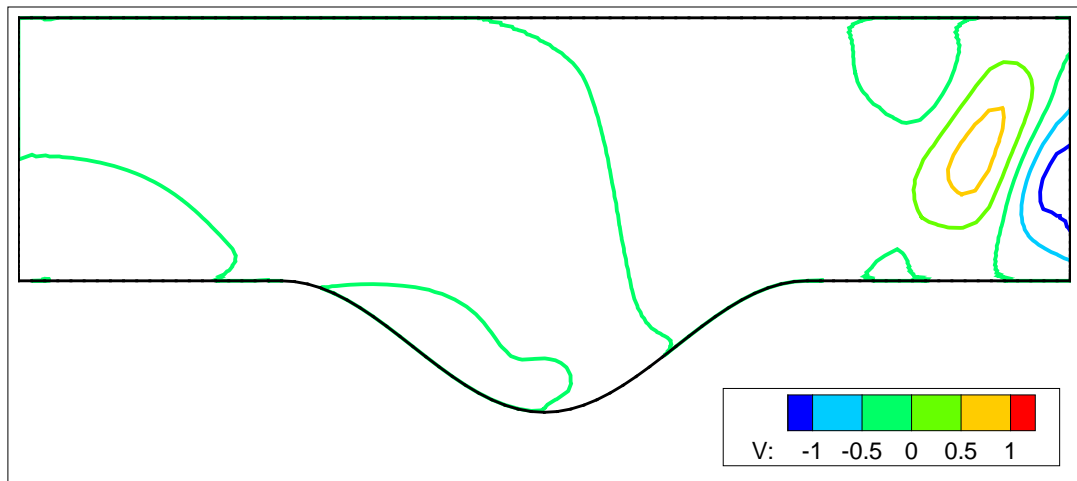
Obr. 33 - Čas $t = 3.3$, druhá složka vektoru rychlosti v



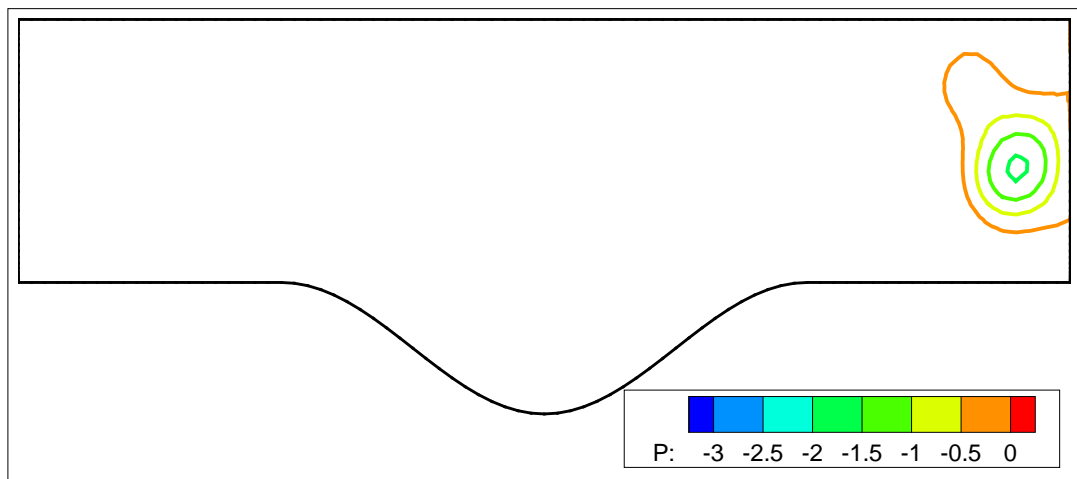
Obr. 34 - Čas $t = 3.3$, kinematický tlak p



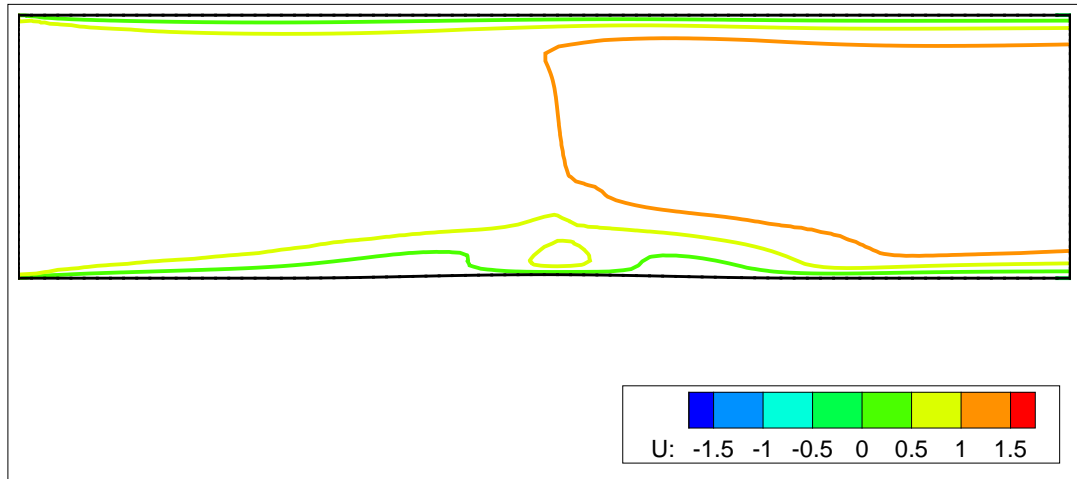
Obr. 35 - Čas $t = 4.8$, první složka vektoru rychlosti u



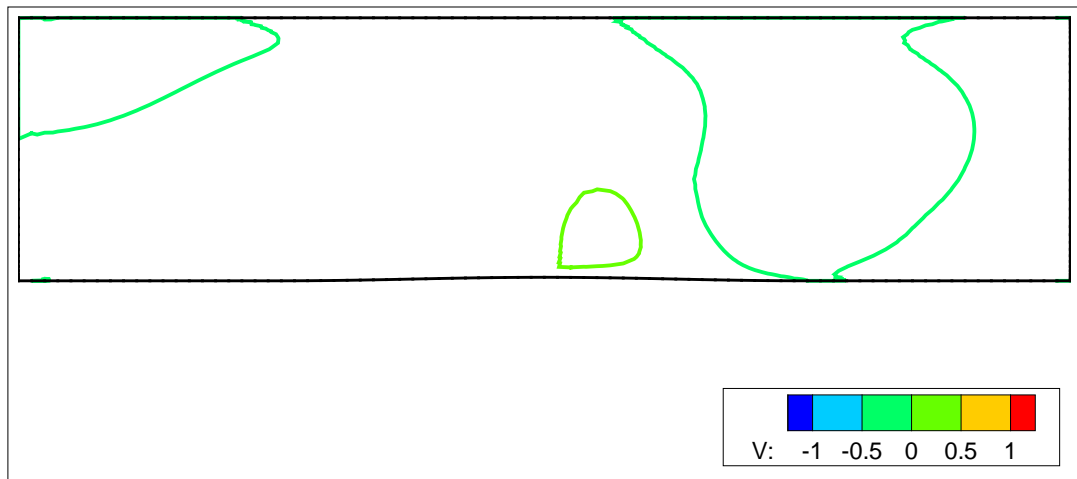
Obr. 36 - Čas $t = 4.8$, druhá složka vektoru rychlosti u



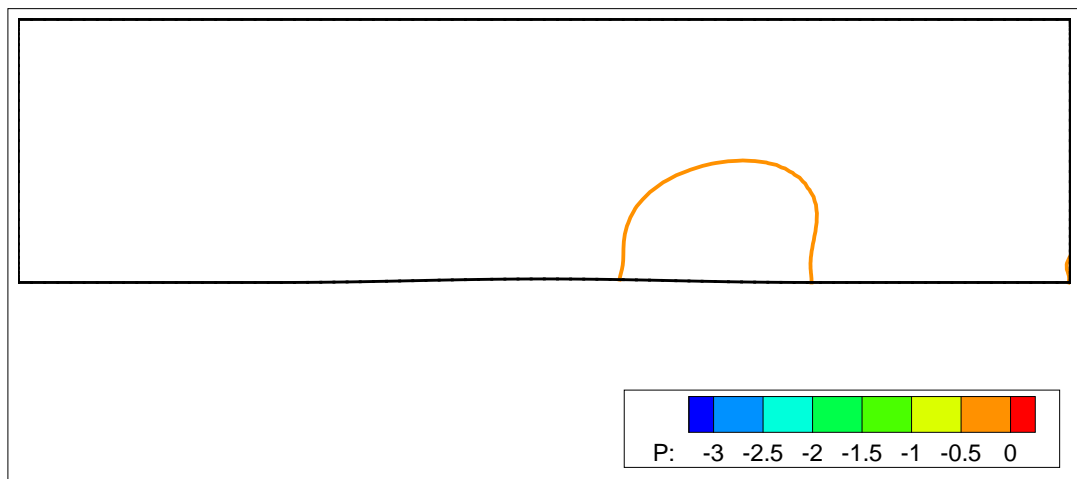
Obr. 37 - Čas $t = 4.8$, kinematický tlak p



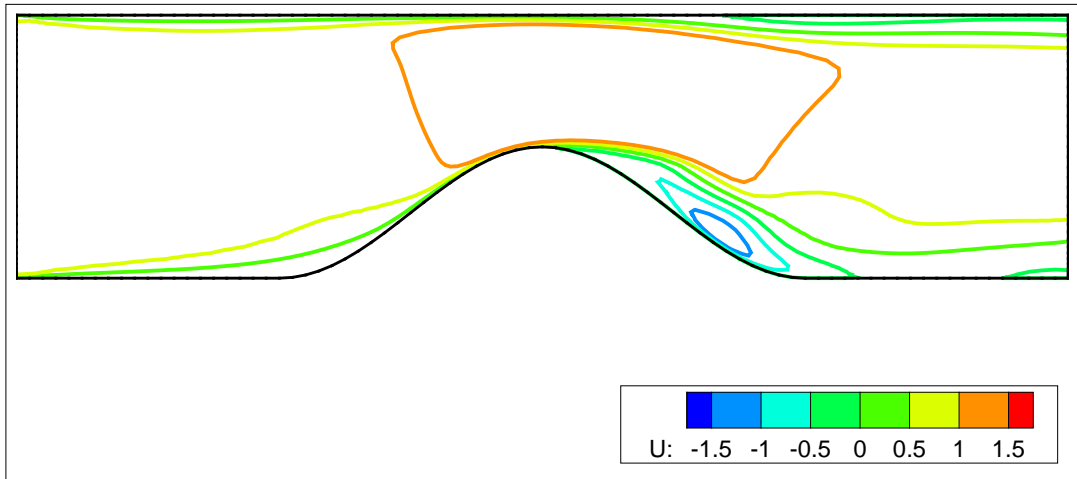
Obr. 38 - Čas $t = 6.4$, první složka vektoru rychlosti u



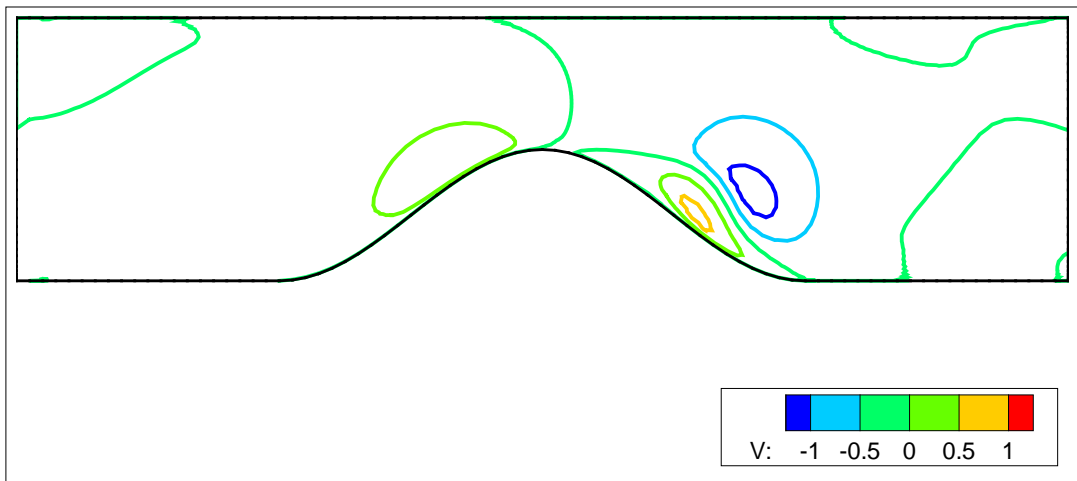
Obr. 39 - Čas $t = 6.4$, druhá složka vektoru rychlosti u



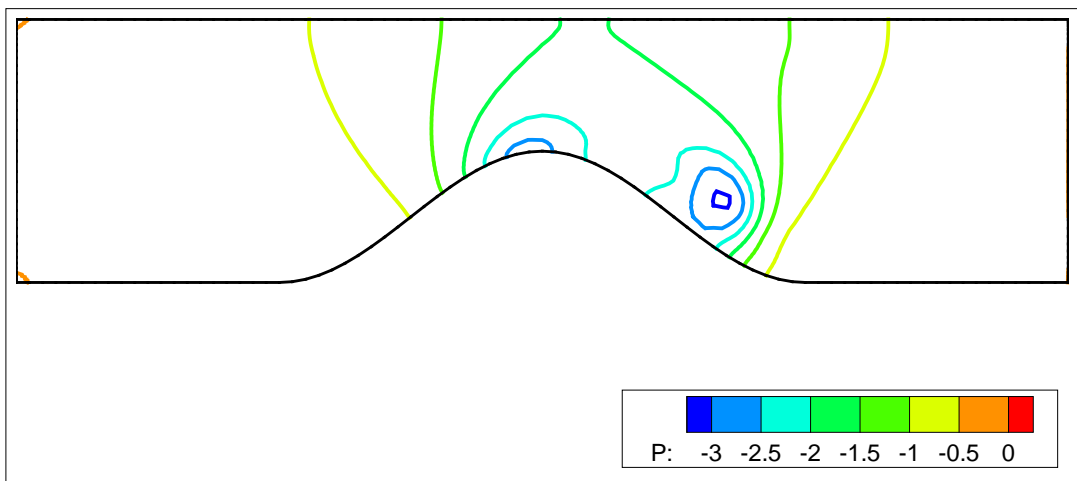
Obr. 40 - Čas $t = 6.4$, kinematický tlak p



Obr. 41 - Čas $t = 8.0$, první složka vektoru rychlosti \mathbf{u}



Obr. 42 - Čas $t = 8.0$, druhá složka vektoru rychlosti \mathbf{u}



Obr. 43 - Čas $t = 8.0$, kinematický tlak p

Kapitola 6

Závěr

Metoda konečných prvků za použití SUPG stabilizace a ALE metody dává spolehlivé a dostatečně přesné výsledky pro řešení proudění tekutiny v oblastech s časově závislou hranicí. Numerické experimenty ukazují zajímavé výsledky, které dále motivují v hledání matematického modelu popisujícího proudění vzduchu v lidských hlasivkách. Pro bližší přiblížení k tomuto úkolu bude nutné rozšířit náš model o metody a matematické vztahy popisující vzájemnou interakci mezi stěnami kanálu a proudící tekutinou a upustit tedy od námi předepsaného pohybu hranice výpočetní oblasti. Použité metody se ukázaly být vhodné pro tento druh problému a je možné je v dalších výpočtech opět využít.

Kapitola 7

Doplňky

7.1 Definice diferenciálních operátorů

Definice: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $u_i \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(x_1, x_2)$. Pak definujeme

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (\text{divergence}),$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} u_2 \quad (\text{konvektivní derivace}),$$

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} \quad (\text{Laplaceův operátor}).$$

7.2 Dvoustupňové implicitní schéma druhého řádu přesnosti pro aproximaci časové derivace

Nechť $\varphi \in \mathcal{C}^3([t_{n-1}, t_{n+1}])$, $t_n = n\tau$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pak aplikací Taylorova vzorce dostaneme

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_{n+1}) - \tau \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{n+1}) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_{n+1}) + O(\tau^3),$$

$$\varphi(t_{n-1}) = \varphi(t_{n+1}) - 2\tau \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{n+1}) + \frac{4\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_{n+1}) + O(\tau^3).$$

Odečteme-li od čtyřnásobku první rovnice druhou rovnici, dostaneme

$$4\varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1}) = 3\varphi(t_{n+1}) - 2\tau \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{n+1}) + O(\tau^3)$$

a tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{n+1}) = \frac{3\varphi(t_{n+1}) - 4\varphi(t_n) + \varphi(t_{n-1})}{2\tau} + O(\tau^2).$$

Odtud zanedbáním členu $O(\tau^2)$ získáme dvoukrokovou zpětnou diferenční formuli druhého řádu přesnosti:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{n+1}) \approx \frac{3\varphi(t_{n+1}) - 4\varphi(t_n) + \varphi(t_{n-1}))}{2\tau}.$$

7.3 Zobecněná derivace

Definice (*Zobecněná derivace*) : Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená neprázdná množina a $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$, tj. pro každou kompaktní množinu $K \subset \Omega$ je $f|_K \in \mathcal{L}^1(K)$. Řekneme, že funkce $f_i \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ je *zobecněná derivace* funkce f podle proměnné x_i , jestliže

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \left\{ \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp } \psi = \overline{\{x \in \Omega : \psi(x) \neq 0\}} \subset \Omega \right\}$$

platí

$$\int_{\Omega} f_i \varphi dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Zobecněnou derivaci funkce f podle x_i poté značíme standardně $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Pozn.: V literatuře lze nalézt zobecněnou derivaci také pod názvem slabá derivace. Ekvivalentně lze v definici Sobolevova prostoru použít tzv. derivaci ve smyslu distribucí.

7.4 Greenova věta

Věta (*Greenova*) : Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s lipschitzovskými spojitou hranicí a $\varphi, \psi \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ jsou funkce. Pak platí

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \psi dx = \int_{\partial \Omega} \varphi \psi n_i dS - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde $n = (n_1, \dots, n_N)$ je vnější jednotková normála k $\partial \Omega$.

Literatura

- [1] Feistauer M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [2] Nomura T., Hughes T. J. R.: *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., **95**, 1992.
- [3] Lube G.: *Stabilized Galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems*, Num. Anal. and Math. Model., Banach Center publications (29), Warszawa, 1994.
- [4] Rokyta M., John O., Málek J., Pokorný M., Stará J.: *Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic*, Skripta MFF, dostupná na adrese <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/skripta-pdr/index.html>
- [5] Sváček P., Feistauer M.: *Application of a Stabilized FEM to Problems of Aeroelasticity*, In: Feistauer M., Dolejší V., Knobloch P., Najzar K. (eds.): *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, ENUMATH 2003, 796-805.
- [6] Sváček P., Feistauer M., Horáček J.: *Numerical simulation of flow induced airfoil vibrations with large amplitudes*, J. Fluids Structures, **23**, 2007.