Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Hora

# Hypotéza Dejeanové

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Štěpán Holub Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2006

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu své bakalářské práce panu Mgr. Štěpánu Holubovi Ph.D. za konzultace, užitečné rady a poskytnutí literatury.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.8.2007 Jan Hora

# Obsah


**1 Úvod a definice** **5**

**2 Pansiotův přenos** **8**

**3 Binární kódování** **12**

**4 Jádrové opakování** **28**

**5 Vyhýbání se $\psi$-jádrovému opakování** **35**

**Literatura** **41**

Název práce: Hypotéza Dejeanové
Autor: Jan Hora
Katedra (ústav): Katedra algebry
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Štěpán Holub Ph.D.
e-mail vedoucího: Stepan.Holub@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme platnost hypotézy Dejeanové pro abecedy s nejméně 38 písmeny. Mějme pevně dané $n \geq 38$. Nejprve zkonstruujeme zobrazení $\varphi_n$ z množiny všech binárních slov do abecedy s $n$ písmeny (budeme ji značit $A_n$), a ukážeme jaké (dvě) vlastnosti stačí nějakému nekonečnému binárnímu slovu $u$ k tomu, aby $\varphi_n(u)$ splňovalo hypotézu Dejeanové. Dále z čísla $n$ snadno vypočteme číslo $m$, a vytvoříme zobrazení $f$ z $A_m$ do množiny binárních slov. Ukážeme jaké vlastnosti má mít nekonečné slovo $v$ nad $A_m$ aby $f(v)$ splňovalo podmínky výše uvedeného slova $u$. Nakonec takové slovo $v$ nad $A_m$ najdeme. Tím práci uzavřeme, neboť $\varphi_n(f(v))$ splňuje hypotézu Dejeanové pro dané $n$.
Klíčová slova: (kritický, maximální) exponent, práh opakování, Pansiotův přenos, jádrové opakování

Title: Dejean's conjecture
Author: Jan Hora
Department: Department of Algebra
Supervisor: Mgr. Štěpán Holub Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Stepan.Holub@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the proof of Dejean's conjecture for alphabets with at least 38 letters. Let $n \geq 38$ be an fixed integer. First we will construct the morphism $\varphi_n$ from set of all binary words to alphabet with n letters (this alpabet will be denoted $A_n$). We will suppose that word $\varphi_n(u)$ proves the Dejean's conjecture for an infinite binary word $u$, we will show the sufficient conditions for the word $u$. From the number $n$ we will easily get numbet $m$. We will define the morpism $f$ from $A_m$ to set of binary words. We will find the sufficient conditions of an word $v$ ensuring that $f(v) = u$. Finally we will construct this word $v$ so the word $\varphi(f(v))$ proves the Dejean's conjecture for alphabet with n letters.
Keywords: (critical, maximal) exponent, repetition threshold, Pansiot transduction, kernel repetition

# Kapitola 1

# Úvod a definice

Obsahem práce je důkaz hypotézy Dejeanové pro abecedu s nejméně 38-mi znaky. Důkaz je převzatý z článku „On the Repetition Threshold for Large Alphabets“ (Arturo Capri). V uvedeném článku jsou některá tvrzení, lemmata a rovnosti ponechána bez důkazu. Úkolem této práce tedy je doplnit chybějící důkazy, případně zpřehlednit některé stávající výpočty a části důkazů.

Napřed se budeme věnovat základním definicím.

Každou posloupnost písmen (znaků) z libovolné abecedy budeme nazývat slovo.

Nechť $A = (e_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$ je slovo ($n \in N$ nebo $n = \infty$) (konečné nebo nekonečné) nad libovolnou abecedou $X$. Pak faktorem slova $A$ nazveme každé slovo $B = (e_i)$ pro $i = r, \ldots, s, (1 \leq r \leq s \leq n)$.

Řekneme, že $B$ je předponou (prefixem) slova $A$ jestliže $B = (e_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, $(k \leq n)$. Množinu všech předpon slova $A$ budeme značit $Pref(A)$.

Řekneme, že $C$ je příponou (postfixem) slova $A$ jestliže $C = (e_i)$ pro $i = k, \ldots, n$ $(k \geq 1)$. Množinu všech přípon slova A budeme značit $Post(A)$.

Nechť $A$ je konečné slovo nad libovolnou konečnou abecedou. Pak (maximální) exponent slova $A$ (značíme $exp(A)$) definujeme jako podíl délky slova $A$ a délky jeho nejmenší periody.

Nechť $A$ je nekonečné slovo nad konečnou abecedou. Pak kritický exponent slova $A$ definujeme jako supremum maximálních exponentů přes všechny faktory slova $A$.

Práh opakování na $n$ písmenech definujeme jako infimum množiny všech kritických exponentů přes všechna nekonečná slova nad libovolnou abecedou s $n$ písmeny.

Pro potřeby důkazu si vezmeme abecedu jejíž prvky jsou právě $1, 2, \ldots, n$. Tuto abecedu označíme $A_n$. Dále množinu všech slov nad abecedou $A_n$ budeme značit $A_n^*$. Množinu všech nekonečných slov nad $A_n$ budeme značit $A_n^\omega$. Slovo nulové délky (tzv. prázdné slovo) nad libovolnou abecedou budeme značit $\varepsilon$. Množinu všech neprázdných slov nad $A_n$ budeme značit $A_n^+$

Uvedli jsme si základní definice a označení. Nyní se podíváme na hlavní tvrzení, které budeme postupně dokazovat.

**Hypotéza Dejeanové 1** *Pro každé $n \geq 5$ platí, že práh opakování na $n$ písmenech je roven $n/(n–1)$.*

Hodí se poznamenat, že odhad $n/(n–1)$ je pro práh opakování nejmenší možný, tj:

**Tvrzení 1** *Neexistuje nekonečné slovo nad $n$ písmennou abecedou s kritickým exponentem menším než $n/(n–1)$.*

Důkaz uvedeného snadného tvrzení byl v původním článku vynechán. Před uvedením důkazu zformulujme jednoduché Lemma.

**Lemma 2** *Pro každé $n$ platí, že pokud $A = a_1 \ldots a_n$ je slovo délky $n$ nad $A_n$, a existují $1 \leq i < j \leq n$ tak, že $a_i = a_j$, pak slovo $A$ obsahuje faktor $B$ s exponentem alespoň $n/(n–1)$.*

**Důkaz 1** *Definujme faktor $B$ slova $A$ následovně: $B = a_i a_{i+1} \ldots a_j$. Vzhledem k tomu, že $a_i = a_j$ je $a_i \ldots a_{j-1}$ periodou slova $B$ délky $(j–i)$. Z toho plyne:*

$$exp(B) \geq (j–i+1)/(j–i) = 1 + 1/(j–i) \geq 1 + 1/(n–1) = n/(n–1).$$

**Důkaz 2** *Úvodem poznamenejme, že pokud slovo $A$ uvedené v lemmatu je faktorem libovolného nekonečného slova $w$ nad $A_n$, pak i $B$ je faktorem $w$ a kritický exponent $w$ je alespoň $n/(n–1)$.*
*Mějme dáno libovolné $n$ přirozené. Ukážeme, že každé slovo délky $n+2$ nad $A_n$ již obsahuje faktor s exponentem alespoň $n/(n–1)$.*

1. *Uvažujme nejprve prvních $n$ písmen slova $w$, a rozlišme dva případy.*

   *Mezi prvními $n$ písmeny existují dvě písmena stejná.*
   *V takovém případě jsou splněny předpoklady uvedeného lemmatu a tvrzení platí. Můžeme se proto omezit na druhou možnost.*

   *Každá dvě taková písmena jsou různá.*
   *V tomto případě prvních $n$ písmen vyčerpává celou abecedu $A_n$. (tj. pro $\forall e_i \in A_n \quad \exists j \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $e_i = a_j$)*
   *Proto také pro $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n+2\} \quad \exists j \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že $a_k = a_j$.*

2. *Prvních $n$ písmen z $w$ tedy pokrývá celou abecedu $A_n$. Uvažujme dále $(n+1)$–ní písmeno. Nutně $\exists j \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $a_{n+1} = a_j$. Rozlišme opět dva případy.*

   $a_1 \neq a_{n+1}$
   *Potom se ve faktoru $A = a_2 \ldots a_{n+1}$ délky $n$ nacházejí dvě stejná písmena, čímž jsou opět splněny předpoklady lemmatu a tvrzení platí.*
   *Stačí proto uvažovat jen druhou možnost.*

   $a_1 = a_{n+1}$

3. *Uvažujme $(n+2)$–hé písmeno a rozlišme tři případy.*

$a_1 = a_{n+2}$

*Z předchozího plyne, že $a_1 = a_{n+1}$, tj. $a_{n+1} = a_{n+2}$. Slovo tedy obsahuje faktor exponentu 2.*

$2 \geq n/(n–1)$ *pro každé $n$, a dostáváme požadovaný závěr.*

$a_2 = a_{n+2}$

*Slovo obsahuje faktor $B = a_1 \ldots a_{n+2}$. Vzhledem k tomu, že $a_1 = a_{n+1}$ a $a_2 = a_{n+2}$ je $a_1 \ldots a_n$ periodou slova $B$.*

$exp(B) \geq (n+2)/n = 1 + 2/n \geq 1 + 1/(n–1) = n/(n–1)$*, tvrzení tedy platí.*

$a_k = a_{n+2}$ *pro $k \in 3, \ldots, n$*

*Použitím lemmatu pro $A = a_3 \ldots a_{n+2}$ dostáváme důkaz tvrzení.*

*Není těžké si všimnout, že u každé z výše uvedených diskusí možnosti pokrývají všechna slova délky $n+2$ nad $A_n$. Ukázali jsme tedy, že každé slovo délky $n+2$ nad $A_n$ obsahuje faktor s exponentem $n/(n–1)$ nebo větším. Každé nekonečné slovo $w$ nad $A_n$ nutně obsahuje nějaký faktor délky $n+2$ a tedy má kritický exponent nejméně $n/(n–1)$.*

# Kapitola 2

# Pansiotův přenos

Ve velké části práce budou hrát velkou roli permutace, proto uvedeme jednoduché označení které budeme dále hojně využívat.

Nechť $x$ je libovolný prvek množiny $A_n$. Nechť $\alpha$ je libovolná permutace množiny $A_n$. Potom obraz prvku $x$ podle permutace $\alpha$ označíme $x\alpha$.

Pro popis permutací budeme používat cykly i obraz množiny $A_n$. Abychom mohli oba způsoby snadno odlišit, budeme psát obrazy množiny $A_n$ do složených závorek a jednotlivá čísla oddělovat čárkami, zatímco cykly budeme psát do kulatých závorek a oddělovat pouze mezerami.

Nyní uvedeme dvě důležité definice a dále vysvětlíme jejich souvislost s hypotézou Dejeanové.

**Definice 1** *Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo, a $B = \{0, 1\}$ je binární abeceda. Uvažujme zobrazení $\varphi_n : B^* \to S_n$ (kde $S_n$ je množinu permutací množiny $A_n$) definované pomocí následujících cyklů:*

$$\varphi_n(0) = (1\,2 \ldots n-1), \qquad \varphi_n(1) = (1\,2 \ldots n) \tag{2.1}$$

**Definice 2** *Nechť $w = (b_i)$, $i \geq 1$ je libovolné slovo nad binární abecedou $B$. Slovo $(a_i)$, $i \geq 1$ nad abecedou $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ určené předpisem $a_i = 1(\varphi_n(b_1\, b_2 \ldots b_i))^{-1}$, $i \geq 1$ budeme značit $\gamma_n(w)$. (Definujeme jak pro konečná, tak pro nekonečná slova $w$.)*

V důkazu Tvrzení 1 jsme ukázali, že pokud nějaké nekonečné slovo $w$ nad $A_n$ má mít kritický exponent roven $n/(n–1)$, pak pro každý jeho faktor $A = (a_{i+1} \ldots a_{i+n})$ délky $n$ musí platit:
buď všechna písmena ve faktoru $A$ jsou po dvou různá
nebo prvních $n$–1 písmen faktoru $A$ je po dvou různých a $a_{i+1} = a_{i+n}$.

Vztah mezi hypotézou Dejeanové a permutací $\varphi_n$ je v tom, že pro každé nekonečné binární slovo $w$ splňuje slovo $\gamma_n(w)$ výše uvedenou podmínku.

Vezměme si libovolný faktor $B = b_1 \ldots b_n$ slova $w$ a ukažme, že $a_1 \ldots a_n = \gamma_n(B)$ splňuje právě jednu ze zmíněných možností.

Jestliže jsou všechna písmena slova $\gamma_n(B)$ navzájem různá, pak nastává první možnost. Předpokládejme tedy, že $a_i = a_j$ pro nějaké $1 \leq i < j \leq n$. Podle Definice 2 máme:

$$\begin{aligned} a_i &= 1(\varphi_n(b_1\, b_2 \ldots b_i))^{-1} \\ a_j &= 1(\varphi_n(b_1\, b_2 \ldots b_j))^{-1} = 1(\varphi_n(b_{i+1}\ \ldots b_j))^{-1}(\varphi_n(b_1\, b_2 \ldots b_i))^{-1}. \end{aligned}$$

Jelikož $a_i = a_j$, tak číslo 1 musí být pevným bodem permutace

$$(\varphi_n(b_{i+1}\ \ldots b_j))^{-1}.$$

Nyní odvodíme jednu důlažitou nerovnost, a tu použijeme k důkazu toho, že $i = 1$ a $j = n$.

Z definice $\varphi_n$ je vidět, že pro libovolné $x \in \{0, 1\}$ a libovolné $2 \leq s \leq n$ platí:

$$1(\varphi_n(x))^{-1} \geq n - 1.$$

$$s(\varphi_n(x))^{-1} \geq s - 1.$$

Z těchto dvou vzorců snadno odvodíme, že pro každé $k < n$ a každé binární slovo $u$ délky $k$ platí:

$$1(\varphi_n(u))^{-1} \geq n - k.$$

Jak jsme již ukázali, tak 1 je pevným bodem permutace $(\varphi_n(b_{i+1}\ \ldots b_j))^{-1}$. Použitím získané nerovnosti dostáváme:

$$1 = 1(\varphi_n(b_{i+1}\ \ldots b_j))^{-1} \geq n - (j - i) = (n + i) - j \geq 1.$$

Vidíme tedy, že $n + i = 1 + j$. To ale znamená, že $j = n$ a $i = 1$. Tím pádem $a_1 = a_n$ a proto nastává druhá možnost.

Tím jsme tedy ukázali vztah mezi slovem $w$ dokazujícím hypotézu Dejeanové, a slovem $\gamma_n(w)$. Dále uvedeme jedno snadné pozorování.

Z definice zobrazení $\varphi_n$ snadno plyne: jestliže $1 \leq i \leq n - 2$, potom máme:

$$i\varphi_n(0) = i\varphi_n(1) = i + 1.$$

Lehce se odvodí, že když $u \in B^*$ a $i \leq n - |u| - 1$, potom

$$i\varphi_n(u) = i + |u|. \tag{2.2}$$

Dosud jsme se zabývaly faktory slova $\gamma_n(w)$ jejich délka je pouze $n$. Slovo $\gamma_n(w)$ však obsahuje i faktory jiné délky. Nyní na ně zaměříme pozornost a budeme se zabývat dalšími podmínkami pro platnost hypotézy. Nejprve uveďme jedno značení.

Ať $1 \leq k < n$. Říkáme, že slovo $u \in B^+$ je $k$-stabilizující (řádu $n$), pokud $1, 2, \ldots, k$ jsou pevné body zobrazení $\varphi_n(u)$. Množinu všech $k$-stabilizujících slov řádu $n$ budeme značit

$Stab_n(k)$. Je snadno vidět, že $Stab_n(n–1) = \mathrm{Ker}\varphi_n$.

Následující lemma ukazuje vztah mezi výskyty $k$-stabilizujících slov v nějakém nekonečném binárním slově $w$ a opakováním stejného faktoru délky $k$ v $\gamma_n(w)$.

**Lemma 3** *Nechť $w = (b_i)$, $i \geq 1$ je nekonečné slovo nad abecedou $B$ a množina $\gamma_n(w) = (a_i)$, $i \geq 1$. Pro čísla $1 \leq i < j$, $1 \leq k \leq n-1$ máme:*

$$a_i a_{i+1} \ldots a_{i+k-1} = a_j a_{j+1} \ldots a_{j+k-1}$$

*právě tehdy když $b_{i+k} b_{i+k+1} \ldots b_{j+k-1}$ je $k$-stabilizující.*

**Důkaz 3** *Pro $0 \leq s \leq k–1$, ze vzorců (2.1) a (2.2) dostáváme:*

$$\begin{aligned} a_{j+s}\varphi_n(b_1 \ldots b_{j+k-1}) &= 1(\varphi_n(b_1 \ldots b_{j+s-1}))^{-1}\varphi_n(b_1 \ldots b_{j+k-1}) \\ &= 1\varphi_n(b_{j+s+1} \ldots b_{j+k-1}) = k - s. \\ a_{i+s}\varphi_n(b_1 \ldots b_{j+k-1}) &= 1(\varphi_n(b_1 \ldots b_{i+s}))^{-1}\varphi_n(b_1 \ldots b_{j+k-1}) \\ &= 1\varphi_n(b_{i+s+1} \ldots b_{i+k-1})\varphi_n(b_{i+k} \ldots b_{j+k-1}) \\ &= (k–s)\varphi_n(b_{i+k} \ldots b_{j+k-1}). \end{aligned}$$

*Tedy $a_{i+s} = a_{j+s}$ právě tehdy když $k–s$ je pevným bodem permutace $\varphi_n(b_{i+k} \ldots b_{j+k-1})$*

Nyní se podíváme na třetí podmínku týkající se slova $w$ které má dokazovat hypotézu Dejeanové. Uveďme definici.

**Definice 3** *Jádrovým opakováním (řádu $n$) nazveme binární slovo ve tvaru $uv$ kde $u \in Ker\varphi_n$, $v \in Pref(u)$ a $|u| < (|v| + n - 1)(n - 1)$.*

Dále uvedeme dvě tvrzení která se k této definici váží. V původním článku se nachází pouze druhé z nich.

**Tvrzení 4** *Jestliže nekonečné binární slovo $w$ obsahuje jádrové opakování řádu $n$, potom slovo $\gamma_n(w)$ má kritický exponent větší než $n/(n–1)$.*

**Důkaz 4** *Nechť $uv$ je jádrové opakování řádu $n$. $\gamma_n(u)$ je nějaké slovo nad abecedou $A_n$ a $\gamma_n(v)$ je jeho předponou (neboť $u \in Ker\varphi_n$ a $v$ je předpona slova $u$). Požadavek na velikosti slov $u, v$ zajišťuje, aby $exp(\gamma_n(uv))$ byl větší než $n/(n–1)$:*
*Zjevně platí:*

$$|\gamma_n(u)| = |u|, \quad |\gamma_n(v)| = |v|, \quad |\gamma_n(uv)| = |uv| \quad |u| < (|v| + n - 1)(n - 1).$$

$$1/n < 1/(n–1) < (|v| + n - 1)/|u| \leq (|v|/|u|).$$

*Z předchozího plyne:*

$$exp(\gamma_n(uv)) \leq |\gamma_n(uv)|/|\gamma_n(u)| = |uv|/|u| = (|u|+|v|)/|u| = 1+|v|/|u| > 1+1/n = n/(n–1).$$

**Tvrzení 5** *Ať $w$ je nekonečné slovo nad abecedou $B$ a $n \geq 5$. Jestliže žádný faktor slova $w$ není jádrovým opakováním a pro každé $k < n$ platí, že žádný faktor slova $w$ s délkou menší než $k(n–1)$ není $k$-stabilizující, pak kritický exponent slova $\gamma_n(w)$ je $n/(n-1)$.*

**Důkaz 5** *Množina $w = (b_i)$, $i \geq 1$ a $\gamma_n(w) = (a_i)$, $i \geq 1$. Pro spor předpokládejme, že $\gamma_n(w)$ má faktor $r$ exponentu $e > n/(n-1)$.*
*BÚNO můžeme předpokládat, že $e \leq 2$. Tak $r = v_1v_2$, kde $v_1 \in A_n^*$, $v_2$ je předponou $v_1$ a $|v_2| = k > |v_1|/(n-1)$.*
*Z $r = a_ia_{i+1}\dots a_{i+|r|-1}$ se pro vhodné $i \geq 1$ odvodí:*

$$v_2 = a_ia_{i+1}\dots a_{i+k-1} = a_ja_{j+1}\dots a_{j+|r|-1}.$$

*kde $j = i + |v_1|$, takže $k(n-1) > j–i$. Jestliže $k < n$, pak podle Lemmatu 3 platí: $u = b_{i+k}b_{i+k+1}\dots b_{j+k-1}$ je $k$-stabilizující slovo délky $j–i < k(n–1)$, což je spor.*

*Tedy uvažujme $k \geq n$. Pak máme :*

$$a_{i+t}a_{i+t+1}\dots a_{i+t+n-2} = a_{j+t}a_{j+t+1}\dots a_{j+t+n-2}, 0 \leq t \leq k–n+1.$$

*Víme, že $Stab_n(n–1) = Ker\varphi_n$. Odtud se s pomocí Lemmatu 3 odvodí: $b_{i+t+n-1}\dots b_{j+t+n-2} \in ker\varphi_n$. Proto pro $0 \leq t \leq k–n$ máme:*

$$\varphi_n(b_{i+t+n-1}\dots b_{j+t+n–1}) = \varphi_n(b_{i+t+n-1}) = \varphi_n(b_{j+t+n–1}).$$

*a následně $b_{i+t+n-1} = b_{j+t+n–1}$*

$$u_1 = b_{i+n–1}\dots b_{j+n–2}, u_2 = b_{i+n–1}\dots b_{i+k–1} = b_{j+n–1}\dots b_{j+k–1}.$$

*Zbývá ukázat, že $u_1u_2$ je jádrové opakování.*

$$u_1 = b_{i+n–1}\dots b_{j+n–2} = b_{i+n–1+t}\dots b_{j+n–2+t}.$$

*(pro $t = 0$) je tedy $u_1$ prvkem $Ker\varphi_n$. Dále platí, že $u_2$ je zřejmě předponou slova $u_1$. A nakonec:*

$$\begin{aligned}
|u_1| &= (j+n–2)–(i+n–1)+1 = j–i–2\\
|u_2| &= (j+k–1)–(j+n–1)+1 = k-n+1\\
|u_1| &= (j–i)–2 < k(n–1)–2 < k(n–1) = (k–n+1+n–1)(n–1)\\
&= (|u_2|+n–1)(n–1).
\end{aligned}$$

*Slovo $u_1u_2$ je jádrové opakování a faktor slova $w$. Což je spor.*

Předchozí tvrzení ukazuje, že pro důkaz hypotézy Dejeanové pro $n$-písmennou abecedu stačí najít nějaké nekonečné binární slovo $w$ splňující následující podmínky:

pro všechna $k < n$ platí, že neexistuje faktor slova $w$ délky menší než $k(n-1)$, který by byl $k$-stabilizujícím faktorem stupně $n$.

žádný faktor slova $w$ není jádrovým opakováním stupně $n$

# Kapitola 3

# Binární kódování

V předchozí kapitole jsme nalezli postačující podmínku pro nekonečné binární slovo $w$ pro něž $\gamma_n(w)$ dokazuje hypotézu Dejeanové. Nyní by stačilo příslučné slovo uvést a důkaz by byl hotov. Bohužel explicitně nalézt takové slovo by pro nás bylo velice obtížné. Proto budeme postupovat jinak a zkonstruujeme pomocné zobrazení $f$ které nám práci usnadní. Uveďme si nejprve jednu snadnou definici.

V celé této kapitole budeme předpokládat, že $n \geq 8$ je pevné přirozené číslo. Budeme proto vynechávat index $n$ ve $\varphi_n$ a $\mathrm{Stab}_n(k)$, pokud nehrozí nedorozumění.

Postupně ukážeme, když je $n$ dostatečně velké, tak se obraz zobrazení $f$ vyhýbá všem $k$-stabilizujícím slovům délky menší než $k(n-1)$. (pro $k < n$)

Nyní tedy zavedeme morfismus $f$ a několik pomocných zobrazení.

Označme

$$p = \lfloor n/2 \rfloor, \qquad m = \lfloor (p-1)/3 \rfloor.$$

Dále definujme slovo $y^*$ předpisem:

$$\begin{aligned} y^* &= (01)^p && \text{pokud}(n = 2p+1) \\ y^* &= 1(01)^{p-1} && \text{pokud}(n = 2p). \end{aligned}$$

V obou případech platí, že $y^* = x^*(01)^{3m}$ pro vhodné $x^* \in B^*$

Definujme morfismus $f : A_m^* \to B^*$ následovně:

$$f(a) = (y^*)^p x^* (101101)^{m-a} 010101 (101101)^{a-1}, a \in A_m.$$

Označme:

$$\tau = \varphi(010101), \qquad \rho = \varphi(y^*), \qquad \sigma = \varphi(101)(\varphi(010))^{-1}.$$

Pro libovolné $a \in A_m$ označme

$$\sigma_a = \tau^{-a} \sigma \tau^a.$$

Zobrazení $f$ i pomocná slova a permutace mají několik důležitých vlastností na které se budeme v budoucnu často odvolávat. Tyto vlastnosti jsou obsahem následujícího tvrzení jehož důkaz ve výchozím článku chyběl.

**Tvrzení 6** *Platí, že:*

1. $\sigma = (n–3 \quad n–2 \quad n \quad n–1)$
2. $\rho = (n \quad 2p–1 \quad 2p–3 \quad 2p–5 \ldots 1)$
3. $\sigma_a = (6a–2 \quad 6a–3 \quad 6a–1 \quad 6a)$
4. $y^* = x^*(01)^{3m}$ *pro vhodné* $x^* \in B^*$, *navíc* $|x^*| = n - 6m - 1$
5. $|f(a)| = (n-1)(p+1)$

**Důkaz 6** 1. *Připomeňme, že platí:*

$$\varphi_n(0) = (1 \quad 2 \ldots n-1), \qquad \varphi_n(1) = (1 \quad 2 \ldots n).$$

*Odtud dostáváme:*

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \{n, 1, 2, \ldots n-2, n-1\} \\
\varphi(10) &= \{n-2, n, 1, \ldots n-3, n-1\} \\
\varphi(101) &= \{n-1, n-2, n, 1, \ldots n-3\} \\
\varphi(101)\varphi^{-1}(0) &= \{n-2, n, 1, \ldots n-4, n-1, n-3\} \\
\varphi(101)\varphi^{-1}(01) &= \{n, 1, 2, \ldots n-4, n-1, n-3, n-2\} \\
\varphi(101)\varphi^{-1}(010) &= \{1, 2, \ldots n-4, n-1, n-3, n, n-2\}.
\end{aligned}$$

*Jak je vidět, čísla* $1, 2, \ldots, n–4$ *jsou pevné body této permutace. Výsledná permutace tedy je:* $\sigma = (n \quad n-1 \quad n-3 \quad n-2) = (n-3 \quad n-2 \quad n \quad n-1)$.

2. *Podle definice platí:*

$$\rho = \varphi(y^*), \qquad \sigma = \varphi(101)(\varphi(010))^{-1}.$$

$$\varphi(01) = \{n, n-1, 1, 2, \ldots n-2\}.$$

*Předpokládejme nejprve, že* $n = 2p+1$, *potom:*

$$\varphi(y^*) = \varphi((01)^p) = (\varphi(01))^p = \{3, 2, 5, 4, 7, 6 \ldots n, n-1, 1\}.$$

*Čísla* $2, 4, 6, \ldots n-1$ *jsou pevné body této permutace. Proto máme:*

$$\rho = (n \quad n-2 \quad n-4 \quad n-6 \quad 3 \quad 1) = (n \quad 2p-1 \quad 2p-3 \ldots 3 \quad 1).$$

*Nechť tedy* $n = 2p$.

$$\begin{aligned}
\varphi(y^*) &= \varphi(1(01)^{p-1}) = \varphi(1)(\varphi(01))^{p-1} \\
\varphi(1) &= \{n, 1, 2 \dots n-2, n-1\} \\
\varphi(1)\varphi(01) &= \{n-1, n-2, n, 1, 2, \dots n-3\} \\
\varphi(1)\varphi(01)^{p-1} &= \{3, 2, 5, 4 \dots n-1, n-2, n, 1\}.
\end{aligned}$$

*Čísla* $2, 4, 6, \dots n–2$ *jsou pevné body dané permutace.*

$$\rho = (n \quad n-1 \quad n-3 \quad n-5 \dots 3 \quad 1) = (n \quad 2p-1 \quad 2p-3 \dots 3 \quad 1).$$

*V obou případech je výsledná permutace*

$$\rho = (n \quad 2p-1 \quad 2p-3 \dots 3 \quad 1).$$

*3. Permutace* $\sigma_a$ *je definovaná předpisem*

$$\tau^{-a}\sigma\tau^{a}$$

*přičemž máme:*

$$\tau = \varphi(010101), \qquad \sigma = \varphi(101)\varphi^{-1}(010)).$$

*Odtud se odvodí:*

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= \{n-1, 1, 2 \dots n-2, n\} \\
\varphi(01) &= \{n, n-1, 1, 2 \dots n-2\} \\
\varphi(010) &= \{n-3, n, n-1, 1, 2 \dots n-4, n-2\} \\
\varphi(0101) &= \{n-2, n-3, n, n-1, 1, 2 \dots n-5, n-4\} \\
\varphi(01010) &= \{n-5, n-2, n-3, n, n-1, 1, 2 \dots n-6, n-4\} \\
\varphi(010101) &= \{n-4, n-5, n-2, n-3, n, n-1, 1, 2 \dots n-6\} \\
\varphi^{-1}(1) &= \{2, 3 \dots n-1, n, 1\} \\
\varphi^{-1}(10) &= \{3, 4 \dots n-1, n, 2, 1\} \\
\varphi^{-1}(101) &= \{4, 5 \dots n-1, n, 2, 1, 3\} \\
\varphi^{-1}(1010) &= \{5, 6 \dots n-1, n, 2, 1, 4, 3\} \\
\varphi^{-1}(10101) &= \{6, 7 \dots n-1, n, 2, 1, 4, 3, 5\} \\
\varphi^{-1}(101010) &= \{7, 8 \dots n-1, n, 2, 1, 4, 3, 6, 5\}.
\end{aligned}$$

*Podle bodu 1. platí:*

$$\sigma = \varphi(101)\varphi^{-1}(010)) = (n-3 \quad n-2 \quad n \quad n-1).$$

*Dále pokračujme indukcí. Nechť* $a = 1$*, potom máme*

$$\begin{aligned}
\tau^{-1}\sigma &= \{7, 8 \dots n-1, n, 2, 1, 6, 4, 5, 3\} \\
\tau^{-1}\sigma\tau &= \{1, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 8 \dots n-1, n\}.
\end{aligned}$$

*Čísla* $1, 2$ *a* $7, 8, 9 \ldots n$ *jsou pevné body této permutace. Vidíme tedy, že* $\tau^{-1}\sigma\tau$ *odpovídá permutaci:*

$$(4 \quad 3 \quad 5 \quad 6) = (6–2 \quad 6–3 \quad 6–1 \quad 6).$$

*Což je požadovaný výsledek.*

*Nyní dokažme indukční krok. Podle indukčního předpokladu máme:*

$$\tau^{-a-1}\sigma\tau^{a+1} = \tau^{-1}(\tau^{-a}\sigma\tau^{a})\tau = \tau^{-1}(6a–2 \quad 6a–3 \quad 6a–1 \quad 6a)\tau.$$

*Podívejme se nejprve jaké hodnoty může číslo* $6a$ *nejvýše nabýt. Připomeňme definice:*

$$p = \lfloor n/2 \rfloor, \qquad m = \lfloor (p-1)/3 \rfloor.$$

*Odtud můžeme odvodit:*

$$3m \leq p–1, \textit{ čili } 2(3m+1) \leq 2p, \textit{ a dále } 2p \leq n, \textit{ tudíž } 6m \leq n–2.$$

*proto dostáváme:*

$$6a \leq 6m \leq n–2.$$

*Navíc máme dokázat uvedený vztah jen pro hodnoty* $1 \ldots m$*. Tím pádem mezi tyto hodnoty patří i* $a+1$ *(jinak nemá smysl indukční krok provádět). Proto platí:*

$$6(a+1) \leq 6m \leq n–2, \textit{ a odtud } 6a \leq n–8.$$

*Tudíž se permutace* $(6a–2 \quad 6a–3 \quad 6a–1 \quad 6a)$ *může týkat jen prvních* $n–8$ *pozic (speciálně se netýká posledních šesti pozic). Proto:*

$$\begin{aligned}
\tau^{-a-1}\sigma\tau^{a+1} &= \tau^{-1}(6a–2 \quad 6a–3 \quad 6a–1 \quad 6a)\tau \\
&= \{7, 8 \ \ldots \ n-1, n, 2, 1, 4, 3, 6, 5\}(6a–2 \quad 6a–3 \quad 6a–1 \quad 6a)\tau \\
&= \{1+6, 2+6 \ \ldots \ n–7+6, n–6+6, 2, 1, 4, 3, 6, 5\}(6a–2 \quad 6a–3 \quad 6a–1 \quad 6a)\tau \\
&= \{1+6, 2+6 \ \ldots \ 6a–2+6, 6a–3+6, 6a–1+6, 6a+6 \ \ldots \ n–7+6, n–6+6, 2, 1, 4, 3, \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 1+6, 2+6 \ \ldots \ 6a–2+6, 6a–3+6, 6a–1+6, 6a+6 \ \ldots \ n–7+6, n–6 \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ \ldots \ 6(a+1)–2, 6(a+1)–3, 6(a+1)–1, 6(a+1) \ \ldots \ n\} \\
&= (6(a+1)–2 \quad 6(a+1)–3 \quad 6(a+1)–1 \quad 6(a+1)) = \sigma_{a+1}.
\end{aligned}$$

4. *Předpokládejme, že* $n = 2p+1$, $y^* = (01)^p$ *potom*

$$\begin{aligned}
p-1 &= 3m &&\Rightarrow y^* = (01)^{3m+1} \Rightarrow x^* = (01) \\
p-1 &= 3m+1 &&\Rightarrow y^* = (01)^{3m+2} \Rightarrow x^* = (01)^2 \\
p-1 &= 3m+2 &&\Rightarrow y^* = (01)^{3m+3} \Rightarrow x^* = (01)^3
\end{aligned}$$

*Nyní předpokládejme, že $n = 2p$.*

$$\begin{aligned} p-1 &= 3m &&\Rightarrow y^* = 1(01)^{3m} &&\Rightarrow x^* = 1 \\ p-1 &= 3m+1 &&\Rightarrow y^* = 1(01)^{3m+1} &&\Rightarrow x^* = 1(01) \\ p-1 &= 3m+2 &&\Rightarrow y^* = 1(01)^{3m+2} &&\Rightarrow x^* = 1(01)^2. \end{aligned}$$

*Ukázali jsme, že $y^* = x^*(01)^{3m}$. Proto $|y^*| = |x^*| + 6m$. Z definic $y^*$, $p$, $m$ plyne, že $|y^*| = n - 1$. Tudíž $|x^*| = n - 6m - 1$.*

5. *Podle definice zobrazení $f$ máme:*

$$\begin{aligned} |f(a)| &= |(y^*)^p x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}| = p|y^*| + |x^*| + |(101101)^{m-1}| + |010101| \\ &= p|x^*(01)^{3m}| + |x^*| + 6m = 6pm + (p+1)|x^*| + 6m = (6m + |x^*|)(p+1) \\ &= (6m + n - 6m - 1)(p+1) = (n-1)(p+1). \end{aligned}$$

Jak jsme již uvedli na začátku kapitoly, zobrazení $f$ nám umožní nalézt vhodné binární slovo $w$ s jehož pomocí dokážeme hypotézu Dejeanové. V tom nám pomůže spojení zobrazení $\varphi$ a $f$.

Definujme morfismus $\psi : A_m^* \to S_n$ předpisem

$$\psi(v) = \varphi(f(v)), \quad v \in A_m^*.$$

a ukažme jeho vlastnosti.

**Lemma 7** *Pro libovolné $a \in A_m$ máme:*

$$\psi(a) = \prod_{c \in A_m, c \neq a} \sigma_c.$$

**Důkaz 7** *Ukažme nejprve, že platí:*

$$(\sigma\tau)^k = \tau^k \prod_{c=1}^{k} \sigma_c = \tau^k \sigma_k \sigma_{k-1} \sigma_{k-2} \dots \sigma_1.$$

*Podle Tvrzení 6 platí*

$$\sigma_a = \tau^{-a} \sigma \tau^a.$$

*Dále budeme postupovat indukcí. Předpokládejme, že $k = 1$, potom*

$$\tau\sigma = \tau^{-a}(\tau^{-1}\sigma\tau) = \sigma\tau.$$

*Nyní ukážeme indukční krok.*

$$\tau^{k+1} \prod_{c=1}^{k+1} \sigma_c = \tau^{k+1} \sigma_{k+1} \prod_{c=1}^{k} \sigma_c = \tau^{k+1} \tau^{-k-1} \sigma \tau^{k+1} \prod_{c=1}^{k} \sigma_c = \sigma\tau(\tau^k \prod_{c=1}^{k} \sigma_c) = (\sigma\tau)^{k+1}.$$

*Neboť navíc platí:*

$$\varphi(101101) = \varphi(101)\varphi(010)^{-1}\varphi(010101) = \sigma\tau.$$

*Tak můžeme snadno odvodit následující.*

$$\varphi((101101)^{m-a}) = (\tau^m \prod_{c=1}^{m} \sigma_c)(\tau^a \prod_{c=1}^{a} \sigma_c)^{-1} = \tau^m (\prod_{c=a+1}^{m} \sigma_c)\tau^{-a}.$$

*A také:*

$$\varphi((101101)^{a-1}) = \tau^{a-1}(\prod_{c=1}^{a-1} \sigma_c).$$

*Proto platí:*

$$\begin{aligned}\varphi((101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}) &= \varphi((101101)^{m-a})\varphi(010101)\varphi((101101)^{a-1})\\ &= \tau^m(\prod_{c=a+1}^{m} \sigma_c)\tau^{-a}\tau\tau^{a-1}(\prod_{c=1}^{a-1}\sigma_c) = \tau^m \prod_{c\in A_m, c\neq a} \sigma_c.\end{aligned}$$

*Z této rovnosti se konečně odvodí:*

$$\begin{aligned}\psi(a) &= \varphi(f(v)) = \varphi((y^*)^p x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1})\\ &= \varphi(y^*)^p\varphi(x^*)\varphi((101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}) = \rho^p\varphi(x^*)\tau^m \prod_{c\in A_m, c\neq a} \sigma_c.\end{aligned}$$

*Zřejmě $\rho = \varphi(y^*) = \varphi(x^*)\tau^m$, a podle Tvrzení 6 je řád $\rho$ roven $p+1$. Tudíž $\rho^p\varphi(x^*)\tau^m = \rho^{p+1}$ je identita a proto dostáváme požadovanou rovnost.*

Z předchozího lemmatu plyne, že pro všechna $v \in A_m^*$ platí:

$$\psi(v) = \prod_{a\in A_m} \sigma_a^{|v|-|v|_a}. \tag{3.1}$$

**Lemma 8** *Nechť $w \in A_m^*$ a $u \in Fact(f(w))$. Pak existují $v_1, v_2 \in Fact(w)$, a $x_1, x_2, x_3, x_4 \in B^*$ a přirozená čísla $h_1, h_2, h_3, h_4$ tak, že*

$$\varphi(u) = (\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\psi(v_1)\rho^{h^2}\phi(x_2) = (\varphi(x_3))\rho^{-h_3}\psi(v_2)\rho^{h^4}\phi(x_4)^{-1}. \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}|u| &= (n–1)((p+1)|v_1| + h_2–h_1) + |x_2| - |x_1|\\ &= (n–1)((p+1)|v_2| + h_4–h_3) + |x_3| - |x_4|.\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$0 \leq h_i \leq p, 0 \leq |x_i| \leq n–2, i = 1, 2, 3, 4, |x_1x_3|, |x_2x_4| \leq n–1. \tag{3.4}$$

*Navíc, pokud $h_1 < p$, potom $x_3$ je předponou $y^*$, jestliže $h_2 < p$, potom $x_4$ je předponou slova $y^*$, jestliže $h_1 = h_2 = p$, $x_1 \neq \varepsilon$ a $x_2 \neq \varepsilon$ potom $v_1c_1 = c_2v_2$ pro nějaké $c_1, c_2 \in A_m$.*

**Důkaz 8** *Tento technický důkaz je značně dlouhý a pracný, nikoli však těžký. Jedinou jeho myšlenkou je to, že slova $v_1, v_2$ nemohou být libovolné faktory slova $w$, ale že jsou slovem $u$ jednoznačně určena. Speciálně jestliže $w = (y_i), i \geq 1$, pak existují jednoznačně určená přirozená čísla $k, l$ taková, že $u$ je faktorem $f(y_k \dots y_l)$, ale již ne faktorem $f(y_{k+1} \dots y_l)$ ani $f(y_k \dots y_{l-1})$. Potom jsou $v_1, v_2$ faktory slova $y_k \dots y_l$. Zbytek důkazu se provede diskuzí podle všech podob slova $u$ a hodnoty $x_i, h_i$ se jednoduše dopočtou.*

*Nejprve si pro potřeby důkazu označme identickou permutaci znakem $I$.*

*Dále postupujme podle podoby slova $u$.*

*Nechť $y_0 y_1 \dots y_k y_{k+1}$ je faktor slova $w$, $(k \geq 0)$ a nechť $u = rf(y_1 \dots y_k)s$, kde $r$ je přípona slova $f(y_0)$, a $s$ je předpona slova $f(y_{k+1})$, přičemž $r \neq f(y_0)$, $s \neq f(y_{k+1})$.*
*Řekneme, že je:*

*splněna Podmínka 1 právě když*

*$r$ obsahuje celý faktor $x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}$ z $f(a)$, kde $a = y_0$.*

*splněna Podmínka 2 právě když*

*$s$ obsahuje více než jen faktor $(y^*)^p$.*

*Definujme slovo $v_1$ jako* $y_1 \dots y_k$ *je-li $r$ prázdné*
$y_0 \dots y_k$ *je-li $r$ neprázdné.*

*Definujme slovo $v_2$ jako* $y_0 \dots y_k$ *je-li splněna Podmínka 1*
$y_1 \dots y_{k+1}$ *je-li splněna Podmínka 2*
$y_0 \dots y_{k+1}$ *jsou-li splněny obě Podmínky*
$y_1 \dots y_k$ *v ostatních případech.*

*Rozlišme několik případů:*

1. $r = \varepsilon$
2. $r \neq \varepsilon$ *a neplatí Podmínka 1,*
3. *platí Podmínka 1*
4. *neplatí Podmínka 2*
5. *platí Podmínka 2*

*Není těžké si všimnout, že každé slovo $u$ ve výše uvedeném tvaru odpovídá právě jedné možnosti z kartézského součinu $\{1, 2, 3)\} * \{4, 5\}$.*
*Rozepišme rovnost $u$ vzorce (3.2):*

$$\varphi(u) = \varphi(rf(y_1 \dots y_k)s) = \varphi(r)\varphi(f(y_1 \dots y_k))\varphi(s).$$

*Všimněme si, že $\varphi(f(y_1 \dots y_k))$ je vždy faktorem slov $\psi(v_1)$ a $\psi(v_2)$. Proto vzhledem k výše uvedeným definicím slov $v_1$ a $v_2$ stačí k důkazu rovnice (3.2) v těchto případech ověřit, že platí následující rovnosti.*

*Pokud si poté vybereme libovolný prvek z kartézského součinu $\{1, 2, 3)\} * \{4, 5\}$ a příslušné rovnice dosadíme do vzorce (3.2), získáme okamžitě platnost (3.2).*

1. $\varphi(r) = (\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1} = \varphi(x_3)\rho^{-h_3}$
2. $\varphi(r) = (\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\varphi(f(y_0)) = \varphi(x_3)\rho^{-h_3}$
3. $\varphi(r) = (\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\varphi(f(y_0)) = \varphi(x_3)\rho^{-h_3}\varphi(f(y_0))$
4. $\varphi(s) = \rho^{h_2}\varphi(x_2) = \rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1}$
5. $\varphi(s) = \rho^{h_2}\varphi(x_2) = \varphi(f(y_{k+1}))\rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1}$

*Zcela analogické rovnice se použijí i pro důkaz vzorce (3.3). Vzorec (3.4) se ověří přímo.*

1. *Nechť $r$ je prázdné slovo. Potom položme: $h_1, h_3 = 0$, a $x_1, x_3 = \varepsilon$. Dostáváme:*

$$\varphi(r) = \varphi(\varepsilon) = I$$
$$(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1} = (\varphi(\varepsilon))^{-1}\rho^0 = I$$
$$\varphi(x_3)\rho^{-h_3} = \varphi(\varepsilon)\rho^0 = I.$$

   *Vztah (3.4) a rovnost $|r| = 0 = 0–(n–1)h_1 - |x_1| = 0–(n–1)h_3 - |x_3|$ plynou triviálně z voleb $h_1, h_3$ a $x_1, x_3$.*

2. *Nechť $r$ není prázdné slovo a není splněna Podmínka 1.*

   *Podmínka 1 neplatí. Proto máme:*

$$zr = x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}.$$

   *kde $a = y_0$, přičemž $z$ je nějaké neprázdné slovo. (Značení $a = y_0$, případně $a = y_{k+1}$ budeme při zápisu uvedeného faktoru používat i ve zbytku důkazu.) Definujme $x_1 = z, h_1 = p, h_3 = 0, x_3 = r$. Dostáváme:*

$$(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\varphi(f(y_0)) = (\varphi(z)^{-1}\rho^{-p}\varphi((y^*)^p zr) = (\varphi(z))^{-1}\varphi(y^*)^{-p}\varphi(y^*)^p\varphi(z)\varphi(r) = \varphi(r)$$
$$\varphi(x_3)\rho^{-h_3} = \varphi(r)\rho^0 = \varphi(r)I = \varphi(r).$$

   *Navíc podle požadavků vzorce (3.4) platí:*

$$|x_1x_3| = |x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}| = n–6m–1 + 6m = n–1.$$

   *Neboť $x_1, x_3$ jsou neprázdné, tak z předchozí rovnosti pro ně dostáváme platnost vzorce (3.4). Pro $h_1, h_3$ platí vzorec triviálně. Zbývá ověřit (3.3). Z definice faktoru $r$ triviálně plyne první rovnost:*

$$|r| = |f(y_0)| - p|y^*| - |z| = |f(y_0)| - (n–1)p–|z| = |f(y_0)| - (n–1)h_1–|x_1|.$$
$$0 - (n–1)h_3 + |x_3| = 0 + |r| = |r|.$$

*3. Nechť platí Podmínka 1*

*Zřejmě platí, že* $z(y^*)^i$ *je předpona slova* $r$*, přičemž* $0 \leq i < p$ *a* $qz = y^*$ *pro nějaké neprázdné slovo* $q$ *(slovo* $z$ *může být i prázdné). Definujme pro* $z$ *neprázdné:*

$$h_1 = p–(i+1), h_3 = p–i, x_1 = q, x_3 = z.$$

*a pro* $z$ *prázdné:*

$$h_1 = h_3 = p–i, x_1 = x_3 = \varepsilon.$$

*Pro* $z$ *neprázdné máme:*

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \varphi(z)\varphi(y^*)^i\varphi(x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1})(\varphi(x_1))^{-1}\rho–h_1\varphi(f(y_0)) \\
&= (\varphi(q))^{-1}\varphi(y^*)^{-p+i+1}\varphi((y^*)^p x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}) \\
&= (\varphi(q))^{-1}\varphi(qz)\varphi(y^*)^i\varphi(x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}) \\
&= \varphi(z)\varphi(y^*)^i\varphi(x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1})\varphi(x_3)\rho^{-h_3}\varphi(f(y_0)) \\
&= \varphi(z)\varphi(y^*)^{-p+i}\varphi((y^*)^p x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}) \\
&= \varphi(z)\varphi(y^*)^i\varphi(x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}).
\end{aligned}$$

*Dále podle (3.4) platí:*

$$|x_1x_3| = |y^*| = n–1$$

*A k rovnostem (3.3) máme:*

$$|r| = |z|+i|y^*|+|x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1})| = |z|+i(n–1)+n–1 = |z|+(i+1)(n–1).$$

$$\begin{aligned}
|f(y_0)| - (n–1)h_1–|x_1| &= (n–1)(p+1)–(n–1)(p–(i+1))–|y^*| + |z| \\
&= (n–1)(p+1–p+(i+1))–(n–1) + |z| = (n–1)(i+1) + |z| = |r| \\
|f(y_0)| - (n–1)h_3 + |x_3| &= (n–1)(p+1)–(n–1)(p–i) + |z| \\
&= (n–1) * (p+1–p+i) + |z| = (n–1)(i+1) + |z| = |r|.
\end{aligned}$$

*Pro* $z$ *prázdné dostaneme:*

$$\varphi(r) = \varphi(y^*)^i\varphi(x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}).$$

$$\begin{aligned}
(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\varphi(f(y_0)) &= \varphi(x_3)\rho^{-h_3}\varphi(f(y_0)) \\
&= (\varphi(\varepsilon))^{-1}\varphi(y^*)^{-p+i}\varphi((y^*)^p x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}) \\
&= \varphi(y^*)^i\varphi(x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}).
\end{aligned}$$

*Podmínky uvedené v (3.4) jsou splněny triviálně. K rovnostem z (3.3) dostáváme:*

$$|r| = |z| + i|y^*| + |x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1})| = i(n–1) + n–1 = (i+1)(n–1).$$

$$\begin{aligned}
|f(y_0)| - (n–1)h_1–|x_1| &= |f(y_0)| - (n–1)h_3 + |x_3| = (n–1)(p+1)–(n–1)(p–(i+1)) \\
&= (n–1)(i+1) = |r|.
\end{aligned}$$

4. *Nechť neplatí Podmínka 2.*

*Zřejmě platí, že* $s = (y^*)^i z$, *kde* $0 \le i \le p, z \ne y^*$. *Je-li* $z$ *neprázdné, tak položme* $zq = y^*$ *pro neprázdné slovo* $q$. *Definujme pro* $z$ *neprázdné:*

$$h_2 = i, h_4 = i + 1, x_2 = z, x_4 = q.$$

*A pro* $z$ *prázdné:*

$$h_2 = h_4 = i, x_2 = x_4 = \varepsilon.$$

*Tím pádem pro* $z$ *neprázdné:*

$$\varphi(s) = \varphi((y^*)^i z).$$

$$\rho^{h_2}\varphi(x_2) = \varphi((y^*))^i\varphi(z) = \varphi(s)$$
$$\rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1} = \varphi((y^*)^{i+1}\varphi(q)^{-1} = \varphi((y^*)^i\varphi(zq)\varphi(q)^{-1} = \varphi((y^*)^i\varphi(z) = \varphi(s).$$

*Dále:*

$$|x_2x_4| = |y^*| = n\text{–}1.$$

*Požadavky z (3.4) jsou splněny. Pro (3.3) máme:*

$$|s| = i|y^*| + |z| = i(n\text{–}1) + |z|(n\text{–}1)h_2 + |x_2| = i(n\text{–}1) + |z|.$$

$$(n\text{–}1)h_4\text{–}|x_4| = (i + 1)(n\text{–}1)\text{–}(n\text{–}1\text{–}|z|) = i(n\text{–}1) + |z| = |s|.$$

*Pro* $z$ *prázdné:*

$$\varphi(s) = \varphi(y^*)^i = \rho^i\varphi(\varepsilon) = \rho^{h_2}\varphi(x_2) = \rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1}.$$

*Podmínky ze vzorce (3.4) jsou splněny triviálně. Dále platí:*
$|s| = i|y^*| = i(n\text{–}1)$
$(n\text{–}1)h_2 + |x_2| = i(n\text{–}1) + 0 = i(n\text{–}1)(n\text{–}1)h_4\text{–}|x_4| = i(n\text{–}1)\text{–}0 = i(n\text{–}1)$

5. *Nechť platí Podmínka 2*

*Zřejmě platí, že* $s = (y^*)^p z$, *pro nějaké neprázdné slovo* $z$. *Dále také platí, že:*

$$zq = x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}$$

*pro nějaké neprázdné slovo* $q$.

*Definujme:*

$$h_2 = p, h_4 = 0, x_2 = z, x_4 = q.$$

*Proto máme:*

$$\varphi(s) = \varphi((y^*)^p\varphi(z) = \varphi((y^*)^h_2\varphi(x_2) = \rho^{h_2}\varphi(x_2) = \varphi((y^*)^p\varphi(z)\varphi(q)\varphi(q)^{-1}$$
$$= \varphi(f(y_{k+1}))\varphi(q)^{-1} = \varphi(f(y_{k+1}))\rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1}.$$

$$|x_2x_4| = |x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}| = n–1.$$
$$|s| = p|y^*| + |z| = h_2|y^*| + |x_2| = |f(y_0)| - |q| = |f(y_0)| - (n–1)h_4–|x_4|.$$

*Právě jsme ukončili důkaz části 5. Tím jsme tedy konečně dokázali, že platí rovnost (3.2), a že*
$$|x_1x_3|, |x_2x_4| \leq n–1.$$
*Ostatní požedavky uvedené v bodě (3.4) jsou splněny triviálně z voleb parametrů* $x_1, x_2, x_3, x_4$ *a* $h_1, h_2, h_3, h_4$.

*Pro rovnost (3.3) rozepišme:*
$$|u| = |rf(y_1 \dots y_k)s| = |r| + |f(y_1 \dots y_k)| + |s|.$$

*Ověřme rovnost (3.3) pro slovo* $v_1$. *Pro* $r$ *prázdné:*
$$\begin{aligned}|u| = |r| + |f(y_1 \dots y_k)| + |s| &= –(n–1)h_1 - |x_1| + (n–1)(p+1)|v_1| + (n–1)h_2 + |x_2| \\ &= (n–1)((p-1)|v_1|–h_1 + h_2) + |x_2| - |x_1|.\end{aligned}$$

*Pro* $r$ *neprázdné:*
$$\begin{aligned}|u| &= |r| + |f(y_1 \dots y_k)| + |s| \\ &= |f(y_0)| - (n–1)h_1–|x_1| + (n–1)(p+1)|v_1| - |f(y_0)| + (n–1)h_2 + |x_2| \\ &= (n–1)(p+1)|v_1| - (n–1)h_1–|x_1| + (n–1)h_2 + |x_2| \\ &= (n–1)((p-1)|v_1|–h_1 + h_2) + |x_2| - |x_1|.\end{aligned}$$

*Pro slovo* $v_2$ *se rovnost (3.3) ověří zcela analogicky diskuzí platnosti Podmínek 1 a 2.*

*Zbývá zvážit možnost, že* $y \in A_m$ *je faktor slova* $w$*, a že platí:*
$$rus = f(y) = (y^*)^p x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}.$$

*pro nějaká neprázdná slova* $r, s$. *(všechny ostatní možné podoby slova* $u$ *spadají do již probraných možností)*
*Definujme:* $v_1 = \varepsilon$, *a dále:* $v_2 = y$ *pokud* $s$ *neobsahuje celý faktor* $x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}$. *V opačném případě* $v_2 = \varepsilon$.

1. *Uvažujme první možnost. V tomto případě* $u = q(y^*)^i z$, *kde* $0 \leq i \leq p, xq = y^*$ *pro nějaké neprázdné slovo* $x$. *Slovo* $z$ *je neprázdná předpona faktoru* $x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}$. *Položme rovno:* $x_2 = z, x_3 = q, x_4 = s, h_1 = 0, h_3 = p–i, h_4 = 0$, *a navíc* $x_1 = \varepsilon, h_2 = i$, *pro* $q$ *prázdné,* $x_1 = x, h_2 = i+1$, *pro* $q$ *neprázdné.*

*Nechť q je prázdné, ověřme (3.2).*

$$\begin{aligned}
(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\psi(v_1)\rho^{h_2}\varphi(x_2) &= (\varphi(\varepsilon))^{-1}\rho^0\varphi(\varepsilon)\rho^i\varphi(z) = \rho^i\varphi(z) = \varphi(u)\\
\varphi(x_3)\rho^{-h_3}\psi(v_2)\rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1} &= \varphi(q)\rho^{i-p}\psi(y)\rho^0(\varphi(s))^{-1} = \varphi(q)\rho^{i-p}\varphi((y^*)^pzs)(\varphi(s))^{-1}\\
&= \psi((y^*)^iz) = \varphi(u).
\end{aligned}$$

*Nyní ověříme (3.3).*

$$|u| = |(y^*)^iz| = i(n\text{–}1) + |z|.$$

$$\begin{aligned}
(n\text{–}1)((p+1)|v_1| + h_2\text{–}h_1) + |x_2| - |x_1| &= (n\text{–}1)(0+i\text{–}0) + |z| - |\varepsilon| = (n-1)i + |z| = |u|\\
(n\text{–}1)((p+1)|v_2| + h_4\text{–}h_3) + |x_3| - |x_4| &= (n\text{–}1)((p+1) + 0 + i\text{–}p) + |\varepsilon| - |s|\\
&= (n\text{–}1)(i+1) - |s|\\
&= (n\text{–}1)i + |z| + |s| - |s| = (n\text{–}1)i + |z| = |u|.
\end{aligned}$$

*Nechť q je neprázdné. Ověřme (3.2).*

$$\begin{aligned}
(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\psi(v_1)\rho^{h_2}\varphi(x_2) &= (\varphi(x))^{-1}\rho^0\psi(\varepsilon)\rho^{i+1}\varphi(z) = (\varphi(x))^{-1}\varphi(xq)\rho^i\varphi(z)\\
&= \varphi(q)\rho^i\varphi(z) = \varphi(u)\\
\varphi(x_3)\rho^{-h_3}\psi(v_2)\rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1} &= \varphi(q)\rho^{i-p}\psi(y)\rho^0(\varphi(s))^{-1} = \varphi(q)\rho^{i-p}\varphi((y^*)^pzs)(\varphi(s))^{-1}\\
&= \varphi(q)\psi((y^*)^iz) = \varphi(u).
\end{aligned}$$

*Nyní ověříme (3.3).*

$$|u| = |q(y^*)^iz| = |q| + i(n\text{–}1) + |z|.$$

$$\begin{aligned}
(n\text{–}1)((p+1)|v_1| + h_2\text{–}h_1) + |x_2| - |x_1| &= (n\text{–}1)(0+i+1\text{–}0) + |z| - |x|\\
&= (n\text{–}1)i + |x| + |q| + |z| - |x|\\
&= (n\text{–}1)i + |x| + |q| + |z| - |x| = (n\text{–}1)i + |z| + |q|\\
(n\text{–}1)((p+1)|v_2| + h_4\text{–}h_3) + |x_3| - |x_4| &= (n\text{–}1)((p+1) + 0 + i\text{–}p) + |q| - |s|\\
&= (n\text{–}1)i + |q| - |s|\\
&= (n\text{–}1)i + |s| + |z| + |q| - |s| = (n\text{–}1)i + |z| + |q|.
\end{aligned}$$

*V obou případech jsme ověřili rovnosti (3.2) a (3.3), a navíc jsou zřejmě splněny i požadavky rovnosti (3.4).*

2. *Nechť tedy s obsahuje celý faktor* $x^*(101101)^{m-a}010101(101101)^{a-1}$*, pak:* $u = q(y^*)^iz$*, přičemž* $0 \le i \le p, zt = xq = y^*$*, pro nějaká neprázdná slova* $t, x$*.*

   *Definujme:* $x_2 = z, x_3 = q, ah_1 = 0, h_3 = 0$*, a navíc:*

   $x_1 = \varepsilon, h_2 = i$*, pro q prázdné*

   $x_1 = x, h_2 = i+1$*, pro q neprázdné.*

*$x_4 = \varepsilon, h_4 = i$, pro $z$ prázdné,*

*$x_4 = t, h_4 = i+1$, pro $z$ neprázdné.*

*V následujících případech ověříme nejprve vzorec (3.2) a poté (3.3).*

*Nechť je $q$ prázdné.*

$$(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\psi(v_1)\rho^{h_2}\varphi(x_2) = (\varphi(\varepsilon))^{-1}\rho^0\psi(\varepsilon)\rho^i\varphi(z) = \rho^i\varphi(z) = \varphi(u).$$

$$\begin{aligned}|u| = |(y^*)^i z| &= i(n\text{–}1) + |z|(n\text{–}1)((p+1)|v_1| + h_2\text{–}h_1) + |x_2| - |x_1| \\ &= (n\text{–}1)(i\text{–}0) + |z| = (n\text{–}1)i + |z|.\end{aligned}$$

*Nechť $q$ není prázdné.*

$$\begin{aligned}(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}\psi(v_1)\rho^{h_2}\varphi(x_2) &= (\varphi(x))^{-1}\rho^0\psi(\varepsilon)\rho^{i+1}\varphi(z) = (\varphi(x))^{-1}\varphi(xq)\rho^{i+1}\varphi(z) \\ &= \varphi(q)\rho^i\varphi(z) = \varphi(u).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|u| = |q(y^*)^i z| &= |q| + i(n\text{–}1) + |z|(n\text{–}1)((p+1)|v_1| + h_2\text{–}h_1) + |x_2| - |x_1| \\ &= (n\text{–}1)(i+1) + |z| - |x| = (n\text{–}1)i + |x| + |q| + |z| - |x| = (n\text{–}1)i + |q| + |z|.\end{aligned}$$

*Nechť je $z$ prázdné.*

$$\varphi(x_3)\rho^{-h_3}\psi(v_2)\rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1} = \varphi(q)\rho^0\psi(\varepsilon)\rho^i(\varphi(\varepsilon))^{-1} = \varphi(q)\rho^i = \varphi(u).$$

$$\begin{aligned}|u| = |q(y^*)^i| &= |q| + i(n\text{–}1)(n\text{–}1)((p+1)|v_2| + h_4\text{–}h_3) + |x_3| - |x_4| \\ &= (n\text{–}1)(i\text{–}0) + |q| - |\varepsilon| = (n\text{–}1)i + |q|.\end{aligned}$$

*Nechť je $z$ neprázdné.*

$$\begin{aligned}\varphi(x_3)\rho^{-h_3}\psi(v_2)\rho^{h_4}(\varphi(x_4))^{-1} &= \varphi(q)\rho^0\psi(\varepsilon)\rho^i + 1(\varphi(t))^{-1} \\ &= \varphi(q)\rho^i\varphi(zt)(\varphi(t))^{-1} = \varphi(q)\rho^i\varphi(z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|u| = |q(y^*)^i z| &= |q| + i(n\text{–}1) + |z|(n\text{–}1)((p+1)|v_2| + h_4\text{–}h_3) + |x_3| - |x_4| \\ &= (n\text{–}1)(i+1) + |q| - |t| = (n\text{–}1)i + |z| + |t| + |q| - |t| = (n\text{–}1)i + |z| + |q|.\end{aligned}$$

*Tím jsme ověřili rovnosti (3.2) a (3.3) i pro druhou možnost. Požadavky vzorce (3.4) jsou splněny triviálně ze zvolených hodnot slov $x_1, x_2, x_3, x_4$ a čísel $h_1, h_2, h_3, h_4$. Tím je důkaz proveden.*

**Tvrzení 9** *Ať $n \geq 28$. Pro libovolné $k = 1, 2 \ldots n-1$ se $f(A^*_{m\text{–}1})$ vyhýbá všem $k$-stabilizujícím slovům délky menší než $k(n-1)$.*

Uvedené tvrzení je jednou z klíčových částí celého důkazu hypotézy Dejeanové, jeho důkaz je však bohužel příliš komplikovaný a dlouhý (i ve srovnání s důkazem předchozího lemmatu) a proto uvedeme jen jeho hlavní kroky.

První krok důkazu

Připomeňme si, že pro libovolné $w \in A_m^*$ slovo fw neobsahuje faktory 00 a 111.

Je snadno vidět, že každé 1-stabilizující slovo musí mít délku alespoň $n-1$. Neboť pro každé slovo $u$ délky nejvýše $n-2$ podle rovnosti (2.2) platí:

$$1\varphi(u) = 1 + |u| \neq 1.$$

Nechť $k = 2$, a $u$ je 2-stabilizující neprázdné slovo délky menší než $2(n–1)$. Je zřejmé, že $u$ musí být také 1-stabilizující, a proto musí mít podle bodu 1 délku nejméně $(n–1)$. Potom označme $u = xv$, kde $|x| = (n–3)$, a

$$(n+1) > |v| = |u| - |x| \geq 2.$$

Podle rovnosti (2.2) máme:

$$1\varphi(x) = 1 + |x| = n–2, \qquad 2\varphi(x) = 2 + |x| = n–1.$$

A protože slovo $u$ je 2-stabilizující, pak musí platit:

$$(n–2)\varphi(v) = 1, (n–1)\varphi(v) = 2.$$

Předpokládejme dále, že

1. $|v| = 2$ Označme $v = ab$, kde $a, b \in \{0, 1\}$. Vidíme, že $a = b = 0$, protože jinak bychom měli:
   $$(n–1)\varphi(ab) = (n–1)\varphi(1b) = n\varphi(b),$$
   což je dle definice $\varphi$ buď 1 nebo $n$.
   $$(n–2)\varphi(ab) = (n–2)\varphi(a1) = (n–1)\varphi(1) = n$$
   Slovo 00 ovšem není faktorem $f(w)$.
2. $|v| = 3$
   Označme $v = abc$, kde $a, b, c \in \{0, 1\}$. V tomto případě platí $a = b = c = 1$. Neboť jinak bychom dostali:
   $$(n–1)\varphi(abc) = (n–1)\varphi(0bc) = 1\varphi(bc) = 3 \neq 2,$$
   pro libovolné $b, c$.
   $$(n–2)\varphi(abc) = (n–2)\varphi(10c) = (n–1)\varphi(0c) = 1\varphi(c) = 2 \neq 1,$$
   pro jakékoli $c$.
   $$(n–2)\varphi(abc) = (n–2)\varphi(110) = (n–1)\varphi(10) = n\varphi(0) = n \neq 1$$

3. $4 \leq |v| \leq n$. Potom slovo $v$ nesplňuje předepsané rovnosti. Označme $v = abyc$, kde $a, b, c \in \{0, 1\}$,a
$$1 \leq |y| = |v| - 3 \leq n\text{–}3.$$
Dále postupujme diskuzí hodnot písmen $a, b$.

Nechť $a = 1$
$$(n\text{–}1)\varphi(abyc) = (n\text{–}1)\varphi(0byc) = 1\varphi(byc) = (1 + |by|)\varphi(c).$$
Navíc máme
$$1 + |by| \leq 1 + 1 + n\text{–}3 = n\text{–}1.$$
Jestliže platí, že $1 + |by| < n\text{–}1$, tak
$$(1 + |by|)\varphi(c) \leq n\text{–}1 \neq 2.$$
Na druhou stranu pokud $1 + |by| = n\text{–}1$, tak pro $c = 1$ máme
$$(1 + |by|)\varphi(c) = n \neq 2,$$
a pro $c = 0$ máme
$$(1 + |by|)\varphi(c) = 1 \neq 2.$$
Z toho důvodu $u$ není 2-stabilizující. Proto můžeme předpokládat, že $a = 1$.

Nechť $b = 0$.
$(n\text{–}2)\varphi(10yc) = (n\text{–}1)\varphi(0yc) = 1\varphi(yc) = 1 + |yc| \leq 1 + 1 + n\text{–}3 = n\text{–}1 \neq 1$. Slovo $u$ proto není ani 1-stabilizující. Můžeme proto dále předpokládat, že $b = 1$.

Nechť tedy $a = b = 1$.
$$(n\text{–}1)\varphi(abyc) = (n\text{–}1)\varphi(11yc) = n\varphi(1yc) = 1\varphi(yc) = 1 + |yc|.$$
Dále platí:
$$1 + |yc| \leq 1 + 1 + n\text{–}3 = n\text{–}1 \leq 2$$
$$1 + |yc| \leq 1 + 1 + 1 = 3 \neq 2.$$
Proto
$$(n\text{–}1)\varphi(11yc) \leq 2,$$
a slovo $u$ není 2-stabilizující. Ukázali jsme tedy, že požadované slovo $u$ musí obsahovat buď faktor 00, nebo faktor 111.

Tím jsme tvrzení dokázali pro $k = 1, 2$. Obdobným způsobem se důkaz provede ještě pro $k = 3, 4$.

Druhý krok důkazu

Tento krok spočívá v důkazu toho, že pro každé 4-stabilizující slovo $u$ které je faktorem $fA_m^*$ platí, že $|u| \geq (n-1)(p+1)$. Tento důkaz je založen na lemmatu 3.5.

Třetí krok důkazu

Nakone se ověří že jestli $n > 16$, a $u$ je 16-stabilizující faktor $f(A_{m-1}^*)$, potom $|u| > 3(n-1)(p+1)$.
(Bohužel mě nenapadl lepší způsob důkazu než použít obdobný postup jako v Prvním kroku, a ten je neshůdný.)

Čtvrtý krok důkazu

Nyní se shrnou poznatky z předchozích kroků. Budeme předpokládat, že $n \geq 28$ a že $u$ je $k$-stabilizující faktor $f(A_{m-1}^*)$.

Z kroků 1 a 2 plyne, že jestli $k \leq 3$, pak

$$|u| \geq k(n-1),$$

a jestli $4 \leq k \leq p+1$, tak

$$|u| \geq (n-1)(p+1) \geq k(n-1).$$

Z kroku 3 pak plyne, že pokud $p+2 \leq k \leq n$–1, potom pro $p \geq 14$ dostáváme $k \geq 16$, takže

$$|u| > 3(n-1)(p+1) > k(n-1).$$

# Kapitola 4

# Jádrové opakování

Na konci kapitoly 2 jsme ukázali, že k úspěšnému dokončení důkazu potřebujeme nalézt nekonečné binární slovo $w$ splňující dvě podmínky. První z těchto podmínek jsme již splnili v předchozí kapitole. Druhou z nich se budeme zabývat nyní. Tato podmínka se týká jádrového opakování.

Nejprve zformulujeme definici $\psi$-jádrového opakování která je analogií jádrového opakování pro zobrazení $\psi = \varphi(f)$.

**Definice 4** *$\psi$-jádrovým opakováním (stupně $n$) nazýváme jakékoli slovo $s \in A_m^*$ formy $v_1v_2$, kde*

$$v_1 \in Ker\psi, \qquad v_2 \in Pref(v_1), \qquad |v_1| < (|v_2| + 3)(n - 1).$$

V této části bychom měli dokázat, že jestliže se $w \in A_{m-1}^*$ vyhýbá $\psi$-jádrovým opakováním, pak se $f(w)$ vyhýbá jádrovým opakováním (což je nutná podmínka pro to, aby $\varphi(f(w))$ mělo kritický exponent $n/(n-1)$).

Zformulujme jedno tvrzení.

**Tvrzení 10** *Ať $w$ je nekonečné slovo nad $(m–1)$-prvkovou abecedou, $u$ je faktorem $f(w)$ a permutace $\varphi(u)$ je identická. Potom existuje faktor $v$ slova $w$ takový, že $\psi(v)$ ( $= \varphi(f(v))$ ) je identická permutace a $|v| = |f(v)|$*

Pro důkaz tvrzení zformulujme snadné technické lemma. Důkaz tohoto lemmatu se v originálním článku nenacházel.

**Lemma 11** *Ať $v_1, v_2 \in Fact(w), x_1, x_2, x_3, x_4 \in B^*, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0$ splňují předpoklady lemmatu 8. Pak platí:*

1. *2 je pevným bodem permutace $\rho$ a permutace $\psi(v_1)$*
2. $|x_1| = |x_2|$
3. $2\varphi(x_1) = 2\varphi(x_2)$
4. *$n$ je pevným bodem permutace $\psi(v)$ pro libovolné slovo $v$*

5. *$6a$ je fixováno $\rho$, pro libovolné $a \in A_m$,*

**Důkaz 9** *1. Podle tvrzení 6 platí*

$$\rho = (n \quad 2p–1 \quad 2p–3 \quad 2p–5 \ldots 1).$$

*Jak je vidět, 2 není liché číslo ani $n$, a proto je pevným bodem této permutace. Připomeňme, že podle rovnosti (3.1) a tvrzení 6 pro každé $v$ platí:*

$$\psi(v) = \prod_{a \in A_m} {\sigma_a}^{|v|-|v|_a} = {\sigma_m}^{|v|-|v|_m} \ldots {\sigma_1}^{|v|-|v|_1}$$

$$\sigma_a = (6a–2 \quad 6a–3 \quad 6a–1 \quad 6a), \quad a \in A_m.$$

*Je snadné si uvědomit, že má-li permutace $\sigma_a$ změnit pozici čísla 2, potom nutně*

$$(6a–3) \leq 2 \leq 6a.$$

*Ovšem každé takové číslo je alespoň 3 a tudíž číslo 2 je pevným bodem permutace $\sigma_a$ pro každé $a \in A_m$.*

2. *Připomeňme, že*

$$\psi(v_1) = \rho^{h_1}\varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1}\rho^{-h_2}, \qquad 0 \leq |x_i| \leq n–2, \ \ i = 1, 2.$$

*Podle bodu 1 platí, že $2\psi(v_1) = 2$, a také $2\rho = 2$. Tudíž:*

$$\begin{aligned} 2 = 2\psi(v_1) &= 2\rho^{h_1}\varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1}\rho^{-h_2} = 2\varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1}\rho–h_2 \\ &= (2 + |x_1|)(\varphi(x_2))^{-1}\rho–h_2 = (2 + |x_1| - |x_2|)\rho^{-h_2}. \end{aligned}$$

*Vzhledem k tomu, že 2 je pevný bod permutace $\rho$, pak rovnost nastane pouze tehdy, když*

$$(2 + |x_1| - |x_2|) = 2(mod\ n)$$

*a tedy když $|x_1| = |x_2|$.*

3. *Platí, že*

$$0 \leq |x_i| \leq n–2, \ i = 1, 2.$$

*Proto:*

$$2\phi(x_1) = 2 + |x_i| = 2 + |x_2| = 2\varphi(x_2).$$

4. *Ze vzorce (3.1) máme:*

$$\psi(v) = \prod_{a \in A_m} {\sigma_a}^{|v|-|v|_a}$$

*pro všechna $v \in A_m*$. Proto:*

$$n\psi(v) = n \prod_{a \in A_m} {\sigma_a}^{|v|-|v|_a}.$$

*Uvedený vzorec speciálně platí i pro slovo $v_1$. K dokončení důkazu tedy stačí ukázat, že $n$ je pevným bodem všech $\sigma_a$. V tvrzení 6 je dokázáno, že*

$$\sigma_a = (6a\text{–}2 \quad 6a\text{–}3 \quad 6a\text{–}1 \quad 6a).$$

*Proto platí, že nemá-li být $n$ pevným bodem $\psi(v_1)$, potom musí existovat $a \in A_m$ takové, že:*

$$6a\text{–}3 \leq n \leq 6a.$$

*Platí ovšem:*

$$6a \leq 6m \leq 6(p\text{–}1)/3 = 2p\text{–}2 \leq n\text{–}2 < n.$$

*Proto je $n$ pevným bodem permutací $\sigma_a$ a odtud i permutace $\psi(v_1)$.*

5. *Podle tvrzení 6 platí:*

$$\rho = (n \quad 2p\text{–}1 \quad 2p\text{–}3 \quad 2p\text{–}5 \ldots 1).$$

*Všechna čísla $2p\text{–}1, 2p\text{–}3, \ldots 1$ jsou lichá, zatímco $6a$ je nutně sudé. Navíc platí*

$$6a \leq 6m \leq 6(p\text{–}1)/3 = 2p\text{–}2 < n.$$

*Tudíž $6a \neq n$, a $6a$ je pevným bodem permutace $\rho$.*

Nyní dokažme tvrzení.

**Důkaz 10** *Ať $v_1, v_2 \in Fact(w), x_1, x_2, x_3, x_4 \in B^*, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0$ splňují požadavky lemmatu 8.*

*Když $u \in Ker(\varphi)$ (tedy $\varphi(u)$ je identická permutace), tak z (3.2) dostáváme:*

$$\psi(v_1) = \rho^{h_1}\varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1}\rho^{-h_2}, \qquad \psi(v_2) = \rho^{h_3}(\varphi(x_3))^{-1}\varphi(x_4)\rho^{-h_2} \tag{4.1}$$

*Odlišíme tři případy, podle hodnot $h_1$ a $h_2$.*

1. $h_1 = p$
   *Potom z tvrzení 6 pro $\rho$ máme*
   $$n\rho^{h_1} = 1.$$
   *Dále platí, že*
   $$1\varphi(x_1) = 1\varphi(x_2) = 1 + |x_1|$$
   *a $n$ je pevným bodem $\psi(v_1)$, a odtud podle (4.1) máme:*
   $$n = n\psi(v_1) = n\rho^{h_1}\varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1}\rho^{-h_2} = 1\varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1}\rho^{-h_2} = 1\rho^{-h_2} = n\rho^{-(h_2+1)}.$$
   *Tudíž $\rho^{-(h_2+1)}$ je identita a proto (z tvrzení 6 pro $\rho$) máme $h_2 = p$. Tedy podle (3.3)*
   $$|u| = |f(v_1)|.$$

*Jestli dále* $x_1 = x_2 = \varepsilon$, *pak podle (4.1) je* $\psi(v_1)$ *identita, což je důkaz tvrzení. Předpokládejme tedy, že* $x_1 = x_2 \neq \varepsilon$, *tudíž z lemmatu 8 dostáváme:*

$$v_1 c_1 = c_2 v_2$$

*pro vhodná* $c_1, c_2 \in A_m$. *Nyní ověříme, že pro libovolné* $a \in A_m$, *platí buď*

$$|v_1|_a \equiv |v_1|$$

*nebo*

$$|v_2|_a \equiv |v_2| \, (mod\, 4).$$

*Skutečně, jestliže* $6a > |x_3|$, *potom*

$$(6a - |x_4|)\varphi(x_3) = 6a - |x_4| + |x_3| = 6a,$$

*a také*

$$(6a - |x_3|)\varphi(x_4) = 6a - |x_3| + |x_4| = 6a,$$

*takže* $6a$ *je fixováno* $(\varphi(x_3))^{-1}\varphi(x_4)$. *Protože* $6a$ *je fixováno také* $\rho$, *tak podle (4.1) platí:*

$$(6a)\psi(v_2) = (6a)\rho^{h_3}(\varphi(x_3))^{-1}\varphi(x_4)\rho^{-h_2} = (6a)(\varphi(x_3))^{-1}\varphi(x_4)\rho^{-h_2} = (6a)\rho^{-h_2} = 6a.$$

*Tedy z (3.1) máme*

$$6a = (6a)\psi(v_2) = (6a){\sigma_a}^{|v_2|-|v_2|_a},$$

*a dále*

$$\sigma_a^{|v_2|-|v_2|_a}$$

*je identita.*

*Protože* $\sigma_a$ *je 4-cyklový posun* $6a$, *musí být*

$$|v_2| - |v_2|_a$$

*celistvým násobkem 4, tudíž*

$$(|v_2|)_a \equiv |v_2| - (mod\, 4).$$

*Jestliže naopak* $6a \leq |x_3|$, *potom podle (3.4) platí:*

$$6a + |x_1| \leq |x_1 x_3| \leq n\text{–}1,$$

*a tedy*

$$(6a)\varphi(x_1) = 6a + |x_1|,$$
$$(6a)\varphi(x_2) = 6a + |x_1|.$$

*Z toho plyne, že* $6a$ *je fixováno permutací*

$$\varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1}$$

*a tudíž je fixováno i* $\psi(v_1)$. *Z rovnosti*

$$6a = (6a)\psi(v_1) = (6a)\sigma_a{}^{|v_2|-|v_2|_a},$$

*plyne*

$$|v_1| \equiv |v_1|_a (mod\ 4).$$

*Tak pro* $a \in A_m$, *platí buď* $|v_1| \equiv |v_1|_a$ *nebo* $|v_2| \equiv |v_2|_a (mod\, 4)$

*Protože* $w \in A_{m-1}^*$, *máme*

$$|v_1|_m = |v_2|_m = 0$$

*a proto*

$$|v_1| = |v_2| \equiv 0(mod\ 4).$$

*Pro jakékoli* $a \in A_m, a \neq c_1, a \neq c_2$ *dostáváme*

$$|v_1|_a = |v_2|_a$$

$$|v_i|_a \equiv 0(mod\, 4).$$

*Navíc*

$$|v_i|_c = |v_i| - \Sigma_{a \in A_m, a \neq c} |v_i|_a \equiv 0(mod\ 4).$$

*Podle (3.1) máme:* $v_i \in ker\psi$. *To znamená, že* $\psi(v_i)$ *je identita, což jsme měli dokázat.*

2. $h_2 = p$

   *Z (4.1) máme*

   $$(\psi(v_1))^{-1} = \rho^{h2}\varphi(x_2)(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1}.$$

   *Jestliže* $h_2 = p$, *pak* $n\rho^{h_2} = 1$ *(vzorec z tvrzení 6). Protože* $n$ *je fixováno* $\psi(v_1)$, *a 1 je fixováno* $\varphi(x_2)(\varphi(x_1))^{-1}$, *dostáváme:*

   $$n = n(\psi(v_1))^{-1} = n\rho^{h_2}\varphi(x_2)(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1} = 1\varphi(x_2)(\varphi(x_1))^{-1}\rho^{-h_1} = 1\rho^{-h_1} = n\rho^{-(h_1+1)}$$

   *Tato rovnost dává, že* $h_1 = p$, *tudíž jde o případ 1.*

3. $h_1, h_2 < p$

   *V tomto případě podle lemmatu 8 máme* $x_3, x_4$ *jsou předpony slova* $y^*$. *Protože* $|x_3| = |x_4|$, *tak máme* $x_3 = x_4$ *takže z (4.1), plyne* $\psi(v_2) = \rho^{h_3 - h_4}$. *Protože* $\psi(v_2)$ *fixuje* $n$, *tak dostáváme*

   $$h_3 - h_4 = 0.$$

   *Proto* $v_2 \in Ker\psi$ *a podle (3.3) platí, že* $|u| = |f(v_2)|$.

Nyní ukážeme jak souvisí jádrové opakování s $\psi$-jádrovým opakováním. Speciálně nám následující tvrzení umožní převést první na druhé.

**Tvrzení 12** *Nechť $w \in A^*_{m-1}$. Pokud faktor z $f(w)$ je jádrové opakování, potom existuje $\psi$-jádrové opakování ve slově $w$.*

**Důkaz 11** *Označíme $K = (p+1)(n–1)$. Ať $r$ je jádrové opakování ležící v $f(w)$ a nechť platí, že $r = u_1u_2$, kde $u_1 \in ker\varphi$, $u_2$ je předpona slova $u_1$.*

$$|u_1| < (|u_2| + n–1)(n–1)$$

*Proto, že $r$ je $\psi$-jádrové opakovái stačí ověřit, že*

$$|u_1| < (|u_2| + 3)(n–1).$$

*Nejprve uvážíme případ, že $|u_2| \leq 2K$. V takovém případě máme:*

$$|u_1| < (|u_2| + n–1)(n–1) \leq (2K + n–1)(n–1) \leq (2K + K)(n–1) = 3K(n–1).$$

*Z Tvrzení 10 existuje faktor $v_1$ slova $w$ takový, že $\psi(v_1)$ je identická permutace a také, že*

$$|u_1| = |f(v_1)| = K|v_1|.$$

*Tudíž $|v_1| < 3(n–1)$, a proto po dosazením $v_2 = \varepsilon, r = v_1v_2$ máme $\psi$-jádrové opakování.*

*Nyní uvažme $|u_2| > 2K$. Podle tvrzení 10 máme $|u_1| = KL$, kde $L \geq 1$. Protože $u_1u_2$ je faktorem $f(w)$, snadno se dostane:*

$$u_1u_2 = \zeta f(v_0)\eta$$

*Kde $v$ je faktorem slova $w$, a platí:*

$$\zeta, \eta \in B^*, |\zeta_1|, |\eta| < K.$$

*Navíc máme:*

$$(L+2)K = LK + 2K < |u_1| + |u_2| = |u_1u_2| = |\zeta_1| + K|v| + |\eta| < K|v| + 2K,$$

*takže $|v| > L$. Tak můžeme napsat $v = v_1v_2$, kde $|v_1| = L$. Tedy:*

$$\zeta_1 f(v_1) = u\zeta_2, \quad u_2 = \zeta_2 f(v_2)\eta, \quad kde\ |\zeta_1| = |\zeta_2|$$

*Zřejmě platí:*

$$|u_1| = KL = K|v_1| = |f(v_1)|.$$

*Dále máme*

$$u_1u_2 = \zeta_1 f(v)\eta,$$

*a proto je u předponou $\zeta f(v)$. Proto pro nějaké $\zeta_2$ platí první rovnost. Z ní a z toho, že $|u_1| = |f(v_1)|$ plyne třetí rovnost. A konečně také*

$$u_1u_2 = \zeta_1 f(v)\eta = \zeta f(v_1)f(v_2)\eta = u_1\zeta_2 f(v_2)\eta$$

*Nyní $\zeta_2 f(v_2)$ je předpona $u_2$, $u_2$ je předponou $u_1$, a $u_1$ je předpona $\zeta_1 f(v_1)$. Proto $\zeta_2 f(v_2)$ je předponou slova $\zeta_1 f(v_1)$. Z toho a z rovnosti $|\zeta_1| = |\zeta_2|$ máme*

$$\zeta_1 = \zeta_2$$

*a $v_2$ je předpona slova $v_1$. Z rovnosti $\zeta_1 f(v_1) = u_1\zeta_1$ snadno plyne:*

$$\varphi(\zeta_1)\varphi(f(v_1)) = \varphi(\zeta_1 f(v_1)) = \varphi(u_1\zeta_1) = \varphi(u_1)\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_1).$$

*Proto $v_1 \in Ker\psi$. Neboť dále platí*

$$|u_2| = |\zeta_2 f(v_2)\eta| < K(|v_2| + 2),$$

*tak snadno odvodíme:*

$$\begin{aligned} K|v_1| = |u_1| &< (|u_2| + n\text{–}1)(n\text{–}1) < K(|v_2| + 2)(n\text{–}1) + (n-1)(n\text{–}1) \\ &< K(|v_2| + 2)(n\text{–}1) + K(n\text{–}1) = K(|v_2| + 3)(n-1) \end{aligned}$$

*Takže*

$$|v_1| < (|v_2| + 3)(n-1)$$

*a tudíž $v_1v_2$ je $\psi$-jádrové opakování.*

Předchozí tvrzení nám umožňuje upravit podmínku týkající se jádrového opakování pro nekonečné binární slovo $w$ které dokazuje hypotézu Dejeanové. Nová verze podmínky říká, že stačí nalézt vhodné nekonečné slovo nad $A_m$ bez $\psi$-jádrového opakování.

# Kapitola 5

# Vyhýbání se $\psi$-jádrovému opakování

Nyní shrneme poznatky předchozích dvou kapitol. Jako důsledek kapitoly 3 máme, že pro každé slovo $w$ nad abecedou $A_{m-1}$ se $f(w)$ vyhýbá všem $k$-stabilizujícím slovům délky menší než $k(n-1)$. Tím je splněna první podmínka uvedená na konci druhé kapitoly.

V kapitole 4 jsme zase ukázali, že pro splnění druhé podmínky stačí nalézt nekonečné slovo nad abecedou $A_m$ bez $\psi$-jádrového opakování.

Pro splnění dvou podmínek tedy stačí nalézt nějaké nekonečné slovo nad abecedou $A_{m-1}$ bez $\psi$-jádrového opakování.

Obsahem této kapitoly bude takové slovo najít pro každé $n \geq 38$.

Nejprve zformulujme tři jednoduchá lemmata.

**Lemma 13** *Následující je ekvivalentní:*

1. *Pro slovo $v$ nad abecedou $A_{m-1}$ platí, že $\psi(v)$ je identická permutace.*

2. *Pro každé $x \in A_{m-1}$ je počet výskytů písmene $x$ ve slově $v$ násobkem čísla 4.*

**Důkaz 12** *Předpokládejme, že platí možnost 1. Potom podle (3.1) víme, že pro všechna $x \in A_m$*

$$4 \text{ dělí } |v| - |v|_x.$$

*(jinak by $\sigma_x$ ani $\psi(v)$ nebyly identická permutace).*

*Protože $|v|_m = 0$, tak pro $x = m$ zjišťujeme, že 4 dělí $|v| - 0$, tudíž*

$$4 \text{ dělí } |v|.$$

*Následně musí být číslem 4 dělitelný i $|v|_a$. pro všechna $a \in A_{m-1}$.*

*Naopak, platí-li 2. Pak 4 dělí také*

$$\sum_{x=1}^{m-1} |v|_x = |v|.$$

*Tudíž dělí i*

$$|v| - |v|_x,$$

*pro všechna $x \in A_m$ je dělitelné číslem 4. Tím pádem pro každé $x$ je $\sigma_x$ identická permutace, a tedy podle vzorce (3.1) je $v \in ker\psi$.*

**Lemma 14** *Ať $w_1 = (b_i)_{i\geq 1}$ je nekonečné slovo definované následovně:*

$$\begin{aligned} b_i &= m\text{–}1 \ pokud \ i \equiv 1 (mod\ 3) \\ &= m\text{–}2 \ pokud \ i \equiv 2 (mod\ 3) \\ &= b_{i/3} \ pokud \ i \equiv 0 (mod\ 3) \end{aligned}$$

*Pokud $v_1 \in {A_m}^*$, $v_2$ buď je předpona slova $v_1$, nebo $v_1$ samotné, a platí, že $v_1v_2$ je faktorem slova $w_1$, a dále platí $|v_2| \geq 3^k, k \geq 0$, potom*

$$3^k \ dělí \ |v_1|.$$

**Důkaz 13** *Nechť $v_1v_2 = b_ib_{i+1} \ldots b_{i+|v_1v_2|-1}$, kde $i \geq 1$. Neboť $v_2$ je předponou $v_1$, máme*

$$b_ib_{i+1} \ldots b_{i+3^k-1} = b_{i+|v|}b_{i+|v|+1} \ldots b_{i+|v|+3^k-1} \tag{5.1}$$

*Označme $|v_1| = 3^qt$, kde $3^q$ je největší mocnina čísla 3 která dělí $|v_1|$, a pro spor předpokládejme, že $q < k$. Potom existuje*

$$j \equiv |v_1| (mod\ 3^k)$$

*tak, že $i \leq j \leq i + 3^k\text{–}1$. Máme*

$$\begin{aligned} j &= 3^q(t + 3^{k-q}h), \\ j + |v_1| &= 3^q(2t + 3^{k-q}h), \end{aligned}$$

*pro nějaké přirozené číslo $h$. Dále máme:*

$$3^q(t + 3^{k-q}h) \equiv (t + 3^{k-q}h)(mod\ 3^k) \equiv t(mod\ 3^k) + (3^{k-q}h)(mod\ 3^k) \equiv t(mod\ 3^k)$$

*Tudíž $j \equiv t(mod\,3)$ a z definice slova $w_1$ plyne: $b_j = b_t$. Obdobně také $b_{j+|v_1|} = b_{2t}$ a protože $t$ není kongruentní s 3 dostáváme $b_t \neq b_{2t}$.*

*To je spor neboť podle (5.1) $b_j = b_{j+|v_1|}$.*

**Lemma 15** *Nechť $w_2 = (c_i)_{i\geq 1}$je nekonečné slovo nad abecedou $A_{m-3}$ definované následovně:*

$$c_i = max\{a \in A_{m-3} | 4^{a-1} dl i\}, \ i \geq 1$$

*Pro libovolný faktor $v$ slova $w_2$ takový, že $\psi(v)$ je identická permutace platí, že $4^{m-3}$ dělí $|v|$.*

**Důkaz 14** *Označme* $|v| = 4^q t$*, kde* $4^q$ *je maximální mocnina čísla 4 která dělí* $|v|$ *a pro spor předpokládejme, že* $q < m–3$*. Máme*

$$v = c_i c_{i+1} \ldots c_{i+4^q t-1},$$

*pro nějaké* $i \geq 1$*. Podle definice pro nějaké* $j \geq 1$ *platí:*

$$c_j > q \text{ právě když } 4^q \text{ dělí } j.$$

*Tedy:*

$$\sum_{a=q+1}^{m-3} |v|_a = Card\{j|i \leq j \leq i + 4^q t–1,\ 4^q dl j\} = t$$

*Protože* $\psi(v)$ *je identita, pak podle lemmatu 13 dostáváme, že 4 dělí* $t$*. Což je spor s maximalitou čísla* $q$*.*

V následujících dvou tvrzeních uvedeme slova o kterých jsme mluvili na začátku kapitoly. Tím bude důkaz hypotézy Dejeanové u konce.

**Tvrzení 16** *Nechť* $w_1 = (b_i)_{i?1}$ *a* $w2 = (c_i)_{i?1}$ *jsou nekonečná slova definovaná v předchozích dvou lemmatech. Jestliže* $n \geq 44$*, potom se nekonečné slovo*

$$w = b_1 c_1 b_2 c_2 \ldots b_i c_i \ldots$$

*vyhýbá* $\psi$*-jádrovému opakování.*

Pro potřeby důkazu uvedeného tvrzení zformulujme jedno technické lemma. Důkaz tohoto lemmatu se v původním článku nenacházel.

**Lemma 17** *Jestliže* $m \geq 7$*, pak* $4^{m-3} \geq 16((n-1)/3)$*.*

**Důkaz 15** *Připomeňme nejprve, že platí* $n–1 \leq 6(m+1)$*. Dále budeme postupovat indukcí.*

*Nejprve uvažujme, že* $m = 7$*. Potom*

$$n \leq 6(7+1) + 1 = 49$$

$$4^{7-3} = 256$$

$$16((n-1)/3) \leq 16((49-1)/3) = 256$$

*Nerovnost tedy platí.*

*Nyní provedeme indukční krok. Víme, že*

$$6((m+1)+1) = 6 + 6(m+1) \geq 6 + n–1 = n + 5$$

$$4^{(m+1)-3} = 4(4)^{m-3} = 3(4)^{m-3} + 4^{m-3}$$

$$16((n+5)/3) = 16((n–1+6)/3) = 16((n–1)/3) + 32.$$

*Z indukčního předpokladu vyplývá nerovnost*

$$4^{m–3} \geq 16((n-1)/3).$$

*Z výše odvozených vztahů máme:*

$$3(4)^{m–3} + 4^{m–3} \geq 16((n-1)/3) + 32.$$

*Tato nerovnost platí, pokud* $3(4)^{m–3} \geq 32$*, což nastane pro každé* $m \geq 5$ *Tím je důkaz hotov, neboť předpokládáme, že* $m \geq 7$

Nyní tedy dokážeme tvrzení.

**Důkaz 16** *Pro spor předpokládejme, že nějaké* $\psi$*-jádrové opakování* $r$ *nastává ve slově* $w$*. Máme:*

$$r = v_1v_2, \quad v \in ker\, \psi, \quad v_2 \in Pref(v), \quad |v| \leq (|v_2| + 3)(n–1)$$

*Protože* $v_1$ *je slovo nad abecedou* $A_{m–1}$ *a* $\psi(v_1)$ *je identita, tak podle lemmatu 13 dostáváme, že*

$$\textit{pro všechna } a \in A_m, 4 \textit{ dělí } |v_1|_a.$$

*Speciálně* $|v_1|$ *je sudá. Vypuštěním všech písmen* $m–1$ *a* $m–2$ *ze slova* $v_1$*, dostaneme faktor* $u_2$ *slova* $w_2$ *tak, že* $\psi(u_2)$ *je identita a* $|u_2|? = |v_1|/2$*.*

*Z lemmatu 15 plyne, že* $4^{m–3}$ *dělí* $|u_2|$*, a proto*

$$2(4)^{m–3} \textit{ dělí } |v_1|.$$

*Předpokládejme, že* $|v_2| \geq 2$ *a ať* $k$ *je přirozené číslo takové, že*

$$2(3)^k \leq |v_2| < 2(3)^{k+1}.$$

*Vymazáním všech písmen* $A_{m–3}$ *ze slova* $r$ *dostaneme faktor* $u_1$ *slova* $w_1$ *ve tvaru* $u_1 = {v_1}^*{v_2}^*$*, kde* ${v_2}^*$ *je předponou slova* ${v_1}^*$*, a platí*

$$|{v_1}^*| = |v_1|/2$$

$$3^k \leq |{v_2}^*| \leq 3^{k+1}.$$

*Podle lemmatu 14 platí, že* $3^k$ *dělí* $|{v_1}^*|$ *a proto dělí i* $|v_1|$*. Takže:*

$$|v_1| \geq 2(4)^{m–3}3^k > (1/3)(4)^{m–3}|v_2|$$

*Připomeňme, že* $m = \lfloor (n–2)/6 \rfloor$ *, takže*

$$n–1 \leq 6(m+1)$$

*Neboť* $n \geq 44$, *tak podle lemmatu 17 máme:*

$$4^{m-3} \geq 16((n-1)/3).$$

*Proto dostáváme:*

$$|v_1| \geq 16(n-1)|v_2|/9.$$

*Protože dále* $|v_1| \leq (|v_2|+3)(n-1)$ *tak máme:*

$$|v_2| + 3 \geq (16/9)|v_2|,$$

*což implikuje* $|v_2| \leq 3$. *Protože* $2(4)^{m-3}$ *dělí* $|v_1|$, *získáváme:*

$$|v_1| \geq 2(4)^{m-3} \geq (32/3)(n-1) > (|v_2|+3)(n-1)$$

*Což je spor s předpokladem.*

**Tvrzení 18** *Předpokládejme, že* $38 \leq n \leq 43$. *Nechť* $w_1 = (b_i), i \geq 1$ *a* $w_2 = (c_i)_{i\geq 1}$ *jsou nekonečná slova z lemmat 14 a 15, a* $w = (d_i)_{i\geq 1}$ *je nekonečné slovo definované předpisem:*

$$\begin{aligned}
d_{2i} &= b_i, && i \geq 1 \\
d_{4i+1} &= c_i, && i \geq 0 \\
d_{4i+3} &= 4, && \textit{jestliže } (4i+3) \textit{ mod } (2(4)^4) < 4^4, i \geq 0 \\
&= 5, && \textit{v ostatních případech}
\end{aligned}$$

*potom se* $w$ *vyhýbá* $\psi$*-jádrovému opakování.*

**Důkaz 17** *Protože* $38 \leq n \leq 43$, *tak* $m = 6$. *Pro spor předpokládejme, že se ve slově* $w$ *nachází* $\psi$*-jádrové opakování* $r$. *Platí, že:*

$$r = v_1v_2, \quad \psi(v_1) \textit{ je identita}, \quad v_2 \textit{ je předpona slova } v_1, \quad |v_1| \leq (|v_2|+3)(n-1)$$

*Protože* $v_1$ *je slovo nad abecedou* $A_{m-1}$ *a* $\psi(v_1)$ *je identita, tak podle lemmatu 13 víme, že pro každé* $a \in A_m$, *4 dělí* $|v_1|_a$.

*Speciálně tedy 4 dělí* $|v_1|$. *Tudíž vymazáním všech písmen* $4 = m-2$ *a* $5 = m-1$ *ze slova* $v$, *získáme faktor* $u_2$ *slova* $w_2$ *takový, že* $|v_1| = 4|u_2|$ *a* $\psi(u_2)$ *je identita.*

*Podle lemmatu 15 víme, že* $4^3$ *dělí* $|u_2|$. *Tedy* $|v_1| = 4^4h$ *pro nějaké přirozené číslo* $h$ *a*

$$(|v_2|+3)(n-1) \geq 4^4h$$

*Neboť* $n \leq 43$, *tak z poslední nerovnosti dostáváme*

$$|v_2| > 3.$$

*Protože* $v_1v_2$ *je faktor slova* $w$ *a* $v_2$ *je předponou slova* $v_1$, *máme:*

$$v_2 = d_id_{i+1} \ldots d_{i+k-1} = d_{i+4^4h}d_{i+4^4h+1} \ldots d_{i+4^4h+k-1}$$

*Pro nějaké $i \geq 1$ a $k \geq 4$.*

*Existuje $j \equiv 3 (mod\, 4)$ tak, že $i \leq j \leq i+k-1$. Podle předchozí rovnosti platí $d_j = d_{j+4^4h}$. Z definice slova $w$ dostáváme, že $h$ je sudé. Tedy pro $i^* = \lceil i/2 \rceil$, $k^* = \lfloor k/2 \rfloor, h^* = h/2$ máme:*

$$b_{i^*} b_{i^*+1} \ldots b_{i^*+k^*-1} = d_{2i^*} d_{2(i^*+1)} \ldots d_{2i^*+2k^*-2}$$

$$b_{i^*+4^4h^*} b_{i^*+4^4h^*+1} \ldots b_{i^*+4^4h^*+k^*-1} = d_{2i^*+4^4h} d_{2i^*+4^4h+2} \ldots d_{2i^*+4^4h+2k^*-2}$$

*a proto:*

$$b_{i^*} b_{i^*+1} \ldots b_{i^*+k^*-1} = b_{i^*+4^4h^*} b_{i^*+4^4h^*+1} \ldots b_{i^*+4^4h^*+k^*-1}$$

*Nechť $q$ je přirozené číslo takové, že $3^q \leq k^* < 3^{q+1}$. Podle lemmatu 13 zjišťujeme, že*

$$3^q \text{ dělí } h^*.$$

*Tedy:*

$$|v_1| = 2(4)^4 h^* \geq 2(4)^4 3^q > 42(k+3) \geq (|v_2|+3)(n-1)$$

*Což je spor s předpokladem.*

Podle tvrzení 16 a 18 pro libovolné $n \geq 38$ existuje nekonečné slovo $w = (d_i), i \geq 1$ nad abecedou $A_{m-1}$, které se vyhýbá $\psi$-jádrovému opakování řádu $n$. Podle tvrzení 9 a 12 se nekonečné binární slovo $f(w) = f(d_1)f(d_2) \ldots f(d_i) \ldots$ vyhýbá jádrovému opakování stupně $n$ a $k$-stabilizujícím slovům řádu $n$ a délky menší než $k(n-1)$ pro každé $k < n$. Podle tvrzení 5 dostáváme, že kritický exponent slova $\gamma_n(f(w))$ je $n/(n-1)$.

Protože práh opakování nemůže být menší než $n/(n-1)$, dokázali jsme následující větu.

**Věta 1** *Pro $n \geq 38$ je práh opakování nad $n$ písmennou abecedou roven $n/(n-1)$.*

# Literatura

[1] Arturo Carpi: *On the Repetition Threshold for Large Alphabets*, MFCS 2006, LNCS 4162, 226-237, 2006.