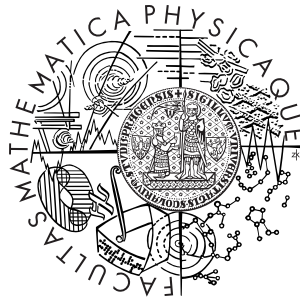


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Alena Drábková

### **VaR a jiné míry rizika**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Čerbáková

Studijní program: Matematika

2007

Děkuji vedoucí své práce RNDr. Janě Čerbákové za odborné konzultace a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1. 8. 2007

Alena Drábková

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
1.1	Riziko . . . . .	5
1.2	Měření rizik . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Value at Risk, koherence</b>	<b>10</b>
2.1	Míra rizika. Koherence . . . . .	10
2.2	Value at Risk . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Koherentní míra rizika</b>	<b>22</b>
3.1	Conditional Value at Risk . . . . .	22
3.2	Expected shortfall . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Optimalizace portfolia vzhledem k VaR a CVaR</b>	<b>32</b>
4.1	Optimalizační modely . . . . .	32
4.2	Numerický příklad . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>37</b>
	<b>Literatura</b>	<b>38</b>

Název práce: VaR a jiné míry rizika

Autor: Alena Drábková

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Čerbáková

e-mail vedoucího: janacerb@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme způsoby měření tržního rizika. Zaměřujeme se na rizikovou míru Value at Risk používanou ve finanční praxi, rozebíráme její nedostatky, speciálně dokazujeme její nekoherentnost a zmiňujeme se o důsledcích z toho plynoucích. Představujeme koherentní míru rizika Conditional Value at Risk (CVaR). Na závěr řešíme úlohu optimalizace portfolia vzhledem k CVaR na základě historických cen akcií deseti vybraných společností.

Klíčová slova: Míra rizika, Value at Risk, koherence, Conditional Value at Risk.

Title: VaR and other risk measures

Author: Alena Drábková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jana Čerbáková

Supervisor's e-mail address: janacerb@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present paper we study methods of measuring market risk. We focus on the risk measure Value at Risk often used in financial practice and we analyse its disadvantages, especially we prove that it is not coherent and show the consequences. We introduce coherent risk measure Conditional Value at Risk (CVaR). At the end we solve optimization problem with respect to CVaR on the basis of historical prices of stocks of ten selected companies.

Keywords: Risk measure, Value at Risk, coherence, Conditional Value at Risk.

# Kapitola 1

## Úvod

V současné odborné literatuře o měření rizika se uvádí mnoho příkladů, kdy v praxi hojně používaná riziková míra Value at Risk nemusí dobře ohodnotit riziko a vystavuje její uživatele nebezpečí příliš velké ztráty. Rozliční autoři se snaží zbavit těchto nedostatků různým způsobem; často pak pracují se stejnými veličinami pod různými názvy. Cílem této práce bude dokázat podrobně základní tvrzení (která se v literatuře často objevují bez důkazů) a předvést zajímavé současné výsledky ve sjednocené terminologii.

### 1.1 Riziko

*Riziko* definuje Cipra v [5] jako nejistotu spojenou s výskytem určité potenciální situace. *Finančním rizikem* budeme stejně jako on rozumět proměnlivost (volatilitu) potenciální ztráty nebo zisku spojených s vlastnictvím určitých aktiv a pasiv. V této práci se budeme zabývat výhradně finančním rizikem. Finanční riziko můžeme rozdělit na tržní, úvěrové, likvidní, operační a právní.

- *Tržní riziko* je riziko způsobené změnami tržních cen aktiv a pasiv nebo tržních měr. Tržní riziko se dále člení podle toho, čím je změna cen nebo měr způsobena. Vyčleňuje se tak mimo jiné úrokové, měnové nebo akciové riziko.
- *Úvěrové riziko* (kreditní riziko) je riziko ztráty způsobené neschopností nebo neochotou smluvního partnera splnit sjednané podmínky kontraktu.

- *Likvidní riziko* je riziko ztráty v důsledku momentálního nedostatku hotových finančních prostředků.
- *Operační riziko* je riziko ztráty způsobené chybami interních operačních systémů nebo osob s nimi pracujícími.
- *Právní riziko* je riziko ztráty, která nastane porušením právních požadavků protistrany nebo neprosaditelností kontraktu.

Pro zjednodušení budeme dále používat slovo riziko ve smyslu tržního rizika.

## 1.2 Měření rizik

Tržní rizika bank a investičních firem je možné regulovat tak, že regulátor stanoví způsob měření rizik a limity na tato rizika. Tato regulace v ideálním případě vede k zajištění bezpečnosti finančního systému a chrání uživatele bankovních služeb. Je ovšem potřeba zvolit způsob, jak riziko měřit. Jednotliví regulátoři mohou postupovat rozdílně, přesto ve světě existují orgány, jejichž doporučeními se v mnoha zemích řídí. Mezi takové orgány patří Basilejský výbor pro bankovní dohled (Basel Committee on Banking Supervision), Banka pro mezinárodní platby (Bank for International Settlements) a Mezinárodní organizace komisí pro cenné papíry (International Organization of Securities Commissions). Kromě regulace rizik se měření rizik používá také k vybírání vhodného portfolia z několika alternativních. Funkci, která nám finanční aktivum nebo portfolio ohodnotí vzhledem k riziku, nazveme *míra rizika*. Výnos aktiva modelujeme náhodnou veličinou. Jednu z prvních rizikových měř navrhli Domar a Musgrave ve své práci [6], kde k měření rizika používali střední hodnotu výnosu ze záporných výnosů.

V padesátých letech minulého století vzniká tzv. Markowitzova teorie portfolia, ve které se k měření rizika používá rozptyl výnosů (viz Markowitz [12]). Markowitzův model hledání optimálního portfolia můžeme formulovat třemi různými způsoby, viz (1.1), (1.2) a (1.3). V prvním z nich minimalizujeme míru rizika příslušného portfolia za předpokladu, že výnos neklesne pod určitou hranici. V druhém maximalizujeme výnos za předpokladu, že rozptyl bude menší než nějaká předem daná hodnota. V třetí úloze pak maximalizujeme veličinu, která roste při rostoucím výnosu a klesá při rostoucím rozptylu. Označme  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  náhodný vektor reprezentující ztráty aktiv  $1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  s vektorem středních hodnot  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  a varianční maticí  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Částku investovanou do  $i$ -tého aktiva označme  $\gamma_i$ ,

$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ ,  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\sigma} > 0$  jsou pevně zvolené částky;  $\hat{\mu}$  značí očekávaný výnos portfolia, pod který nechceme klesnout,  $\hat{\sigma}^2$  je maximální rozptyl portfolia, který jsme ochotni akceptovat. Faktor vyjadřující investorův vztah k riziku označíme  $\lambda$ .

$$\left\| \begin{array}{l} \min \quad \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\gamma} \\ \text{za podmínek} \\ \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\mu} \geq \hat{\mu}, \\ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{1} = 1, \\ \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \max \quad \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{za podmínek} \\ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\gamma} \leq \hat{\sigma}^2, \\ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{1} = 1, \\ \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \max \quad \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\mu} - \lambda \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\gamma} \\ \text{za podmínek} \\ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{1} = 1, \\ \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Rozptyl výnosů jako míra rizika má ale následující nevýhodu - ohodnotí jako rizikové aktivum s velkou potenciální ztrátou i aktivum s velkým potenciálním ziskem. Proto se hledaly další míry rizika, které tuto nevýhodu již nemají, na jednu z nich upozorňuje již Markowitz ve své knize [12]. Nazývá ji semivariancí a pro náhodnou veličinu  $X$  ji definuje jako

$$S_E = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^+]^2,$$

kde  $(x)^+$  značí kladnou část  $x$ , tj  $(x)^+ := \max\{x, 0\}$ . Její počítání je však oproti rozptylu náročnější.

V roce 1963 se Kataoka v [11] zabýval následující optimalizační úlohou:

$$\left\| \begin{array}{l} \max \quad \hat{\mu} \\ \text{za podmínek} \\ P[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{X} \geq \hat{\mu}] \geq 1 - \alpha, \\ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{1} = 1, \\ \boldsymbol{\gamma} \geq 0, \end{array} \right.$$

kde  $\alpha \in (0, 1)$ . Kataokova podmínka  $P[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{X} \geq \hat{\mu}] \geq 1 - \alpha$  vede na dnes nejpoužívanější rizikovou míru - Value at Risk, detailně viz 2. kapitola.

Riziková míra Value at Risk udává nejhorší ztrátu, ke které může dojít s předepsanou pravděpodobností ve stanoveném budoucím období. Value at Risk, zkráceně VaR, se objevuje už ve dvacátých letech minulého století, kdy ji použila newyorská burza pro počítání kapitálových požadavků společností, jejichž akcie byly na burze obchodované, jak uvádí Holton v [9]. Kapitálový požadavek je veličina, odrážející úroveň kapitálu, který instituci umožňuje absorbovat značné nepředpokládané ztráty a poskytuje přiměřenou záruku zainteresovaným osobám, Evropská komise [7] (angl. *capital requirement*). Známější se Value at Risk stala díky společnosti J. P. Morgan, která v 80. letech vyvíjela vlastní způsob počítání hodnoty Value at Risk. V roce 1993 byla tato riziková míra publikována ve zprávě G30 (Group of 30), o rok později pak J. P. Morgan uveřejnil systém RiskMetrics<sup>TM</sup> - soubor standardů pro měření tržního rizika. V roce 1996 byla Value at Risk doporučena k regulaci finančních rizik v Dodatku kapitálové dohody o zahrnutí tržních rizik (*Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*). V devadesátých letech a na přelomu století došlo k několika velkým ztrátám v poměrně důvěryhodných společnostech. Jorion v [10] rozebírá případ investičního fondu okresu Orange County, který utrpěl ztrátu 1.6 miliard amerických dolarů. Došlo k selhání několika kontrolních mechanismů. Jisté varování by nám dala i veličina Value at Risk, pokud by bývala na měření rizika použita. Jak uvádí Jorion v [10], spočítáním Value at Risk příslušného portfolia bychom dostali částku 1.1 miliard amerických dolarů. Tato cifra by jistě odradila mnohé investory a konečná ztráta fondu nemusela být tak velká. Tato a další ztráty přispěly k rozšíření metody Value at Risk ve finančním sektoru. V dnešní době je riziková míra Value at Risk hojně používána bankovními institucemi.

Práce má následující strukturu: ve 2. kapitole uvedeme základní definice, představíme rizikovou mírou Value at Risk a dokážeme, že Value at risk není koherentní mírou rizika. Ve 3. kapitole popíšeme několik postupů vytvoření



rizikové míry, která oproti Value at Risk splňuje vlastnost koherence. Ve 4. kapitole uvedeme úlohu optimalizace portolia vzhledem k různým mírám rizika a na historických datech deseti společností spočteme optimální portfolio pro několik zvolených hodnot minimálních očekávaných výnosů.

# Kapitola 2

## Value at Risk, koherence

Míra rizika se používá především ve finančnictví jako kvantitativní prostředek k porovnání odlišných alternativ. Umožňuje nám rozhodnout se mezi dvěma portfolii následujícím způsobem. Pokud se nám podaří najít funkci, která ohodnotí rizikovost portfolia, můžeme si pak vybrat to portfolio, které je méně rizikové. V případě množiny portfolií se můžeme pokusit najít nejméně rizikové portfolio vzhledem k dané míře rizika.

V celé práci budeme uvažovat náhodné veličiny se zprava spojitou distribuční funkcí definované na měřitelném prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  s hodnotami v  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Náhodná veličina  $X$  bude reprezentovat ztráty, a to tak, že je-li  $X(\omega) > 0$  pro nějaké  $\omega \in \Omega$ , pak jsme utrpěli ztrátu a je-li  $X(\omega) < 0$ , pak jsme dosáhli zisku. Pro jednoduchost budeme v případech, kdy to není nezbytně nutné, vynechávat argument  $\omega$ . Budeme se držet anglických názvů rizikových měř, neboť česká terminologie není zavedená.

### 2.1 Míra rizika. Koherence

Definici rizikové míry přebereme z práce Gaivoronski a Pflug [8].

#### Definice 2.1.1.

*Míra rizika* je zobrazení  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $V$  je množina reálných náhodných veličin.

#### Příklad 2.1.2.

- (i) V úvodu jsme zmínili rizikovou míru  $\rho_1(X) := \mathbf{E}[X|X > 0]$ , kterou použili Domar a Musgrave v [6].

(ii) Markowitz [12] měří riziko pomocí rozptylu

$$\rho_2(X) =: \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2.$$

(iii) Rozptyl je symetrická riziková míra, to znamená, že ztráty i výnosy jsou penalizovány stejnou měrou. Již Markowitz navrhuje k používání tzv. semivarianci

$$\rho_3(X) := \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^+]^2,$$

kteřá počítá rozptyl pouze ze ztrát.

Value at Risk je riziková míra založená na kvantilu, proto musíme nejprve zavést tento pojem.

**Definice 2.1.3.**

Nechť  $X$  je reálná náhodná veličina a  $\alpha \in (0, 1)$ . Pak hodnotu

$$q_\alpha := \min\{x \in \mathbb{R}; P[X \leq x] \geq \alpha\}$$

nazveme *dolní  $\alpha$ -kvantil náhodné veličiny  $X$* .

*Horní  $\alpha$ -kvantil  $X$*  definujeme jako

$$q^\alpha := \inf\{x \in \mathbb{R}; P[X \leq x] > \alpha\}.$$

Tuto definici kvantilů uvedli Acerbi a Tasche v [3].

**Poznámka 2.1.4.** Platí  $q_\alpha \leq q^\alpha$  a rovnost nastává právě tehdy, když  $P[X \leq x] = \alpha$  pro nejvýše jedno  $x \in \mathbb{R}$ , viz Acerbi a Tasche v [3].

Nyní zdefinujeme horní a dolní Value at Risk.

**Definice 2.1.5.**

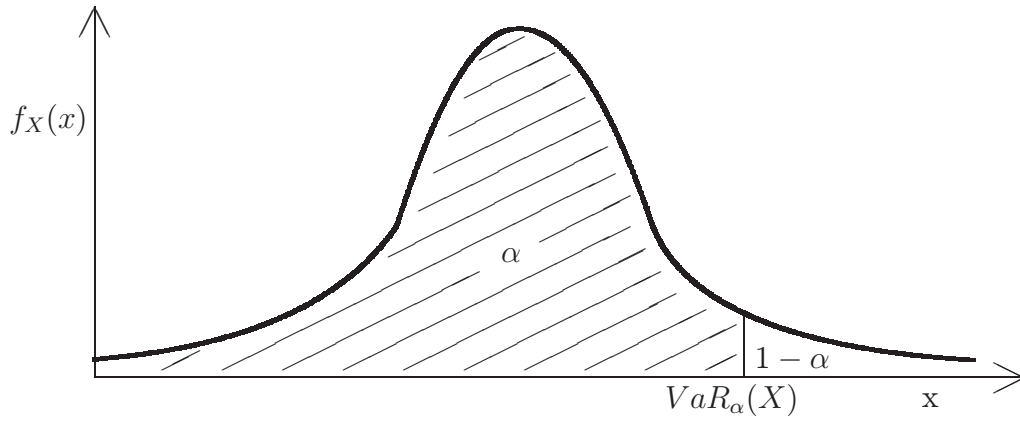
Nechť  $X$  je reálná náhodná veličina,  $\alpha \in (0, 1)$ . Pak

$$\text{VaR}_\alpha(X) := q_\alpha, \quad \text{resp.} \tag{2.1}$$

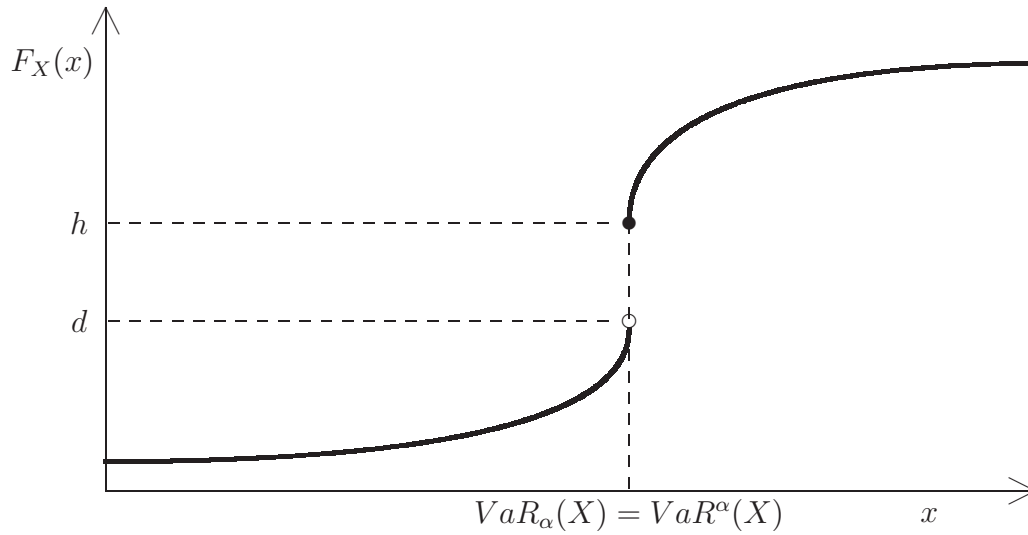
$$\text{VaR}^\alpha(X) := q^\alpha.$$

Jinak řečeno:  $\text{VaR}_\alpha(X)$  je takové číslo, že skutečná ztráta ze dané období bude větší než  $\text{VaR}_\alpha(X)$  s pravděpodobností  $1 - \alpha$ . Za Value at Risk (zkráceně VaR) budeme považovat dolní Value at Risk. Česky se též používá

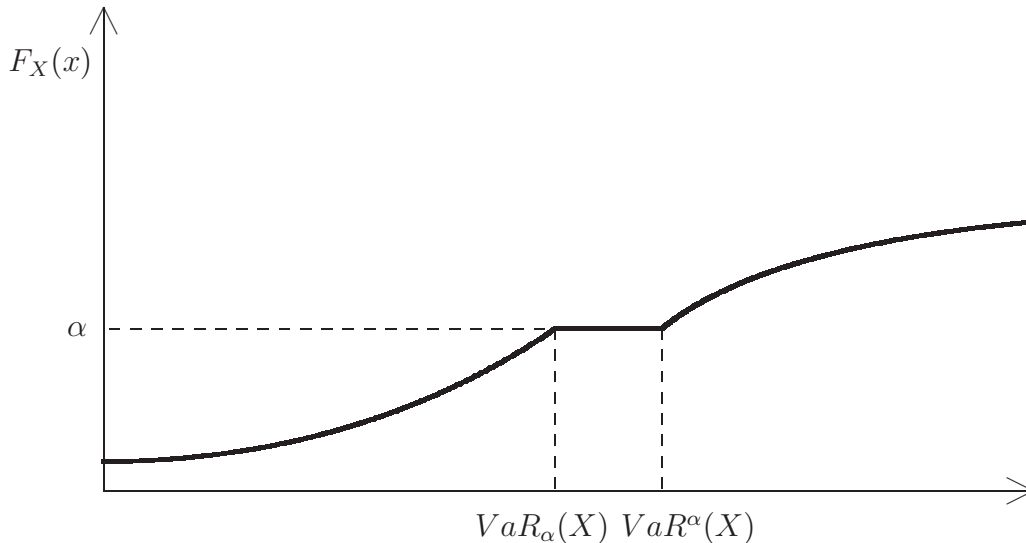
název *hodnota v riziku* nebo *riskovaná hodnota*, viz Cipra [5].



Obrázek 1: Value at Risk pro spojité rozdělení.



Obrázek 2: Distribuční funkce se skokem v bodě  $VaR_\alpha(X)$ .



Obrázek 3: Distribuční funkce konstantní na intervalu.

Zobrazení kvantilů a tedy také Value at Risk pro případ spojitého rozdělení náhodné veličiny  $X$  vidíme na obrázku 1, kde je znázorněna hustota tohoto rozdělení  $f_X$ . Plocha pod hustotou do  $q_\alpha (= q^\alpha)$  je rovna právě  $\alpha$ . Horní a dolní kvantil se rovnají, neboť ve spojitém rozdělení je distribuční funkce rostoucí a pro každé  $\alpha \in (0, 1)$  platí  $P[X \leq x] = \alpha$  právě pro jedno  $x \in \mathbb{R}$  (viz poznámka 2.1.4). V případě, kdy distribuční funkce rostoucí není, může rovnice  $P[X \leq x] = \alpha$  mít mnoho řešení (tvořících interval) (viz obrázek 3) nebo také nemusí mít žádné řešení (obrázek 2).

Obrázek 2 popisuje situaci, kdy distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ , značíme  $F_X$ , má skok v bodě  $\text{VaR}_\alpha(X)$ . Hodnoty  $d$  a  $h$  spočteme jako

$$d = \lim_{y \rightarrow \text{VaR}_\alpha(X)^-} F_X(y), \quad h = F_X(\text{VaR}_\alpha(X)).$$

V případě obrázku 3, kdy rovnice  $P[X \leq x] = \alpha$  má více řešení, je  $F_X(x)$  rovna konstantně  $\alpha$  na intervalu  $[\text{VaR}_\alpha(X), \text{VaR}^\alpha(X)]$ . Tato situace také způsobuje nespojité chování  $\text{VaR}_\alpha(X)$ . To znamená, že pokud budeme chtít „o trochu větší“ konfidenční hladinu  $\alpha$ ,  $\text{VaR}_\alpha(X)$  se změní skokově. Tato vlastnost může mít nepříjemné důsledky, pracujeme-li s velkými částkami peněz.

Value at Risk je v praxi hojně používaná riziková míra a lze ji aplikovat téměř na všechny druhy rizika. Její nevýhodou je, že nerozlišuje situaci, kdy

při překročení hodnoty Value at Risk budou ztráty jen o málo větší, od situace, kdy ztráty při překročení hodnoty Value at Risk budou obrovské. Navíc, jak ukážeme později, diverzifikací portfolia nemusí dojít ke snížení hodnoty Value at Risk. Tyto problémy vedly k zavedení pojmu koherence, vlastnosti, kterou by „rozumné“ míry rizika měly splňovat. Poprvé s tímto pojmem přišli Artzner a kol.; my si zde uvedeme tento pojem tak, jak jej tito autoři uvedli v [2], v modifikaci pro náhodnou veličinu vyjadřující ztráty.

**Definice 2.1.6.**

Rizikovou míru  $\rho$  nazveme *koherentní*, pokud splňuje následující čtyři vlastnosti:

- (i) **Translační invariance:** Pro každou náhodnou veličinu  $X$  a  $\forall a \in \mathbb{R}$  platí

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a.$$

- (ii) **Subaditivita:** Pro každé dvě náhodné veličiny  $X_1, X_2$  platí

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2).$$

- (iii) **Positivní homogenita:** Pro každou náhodnou veličinu  $X$ ,  $\forall \lambda \geq 0$  platí

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$$

- (iv) **Monotonie:** Pro každé dvě náhodné veličiny  $X_1$  a  $X_2$  takové, že  $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$  pro všechna  $\omega \in \Omega$ , platí

$$\rho(X_1) \leq \rho(X_2).$$

**Poznámka 2.1.7.**

Jednotlivé vlastnosti znamenají přirozené požadavky na rizikovou míru.

- (i) Přidáme-li do portfolia bezrizikový kapitál, pak množství peněz, které potřebujeme mít k dispozici na pokrytí případné ztráty, se sníží (respektive zvýší) o velikost tohoto kapitálu.
- (ii) Diverzifikací portfolia (rozložením investované částky do více aktiv) se sníží riziko.
- (iii) Investujeme-li  $\lambda$ -násobnou částku, může být naše ztráta  $\lambda$ -krát větší.

- (iv) Je-li ztráta portfolia  $X_2$  vždy větší než ztráta portfolia  $X_1$ , pak  $X_2$  je rizikovější.

**Definice 2.1.8.**

Řekneme, že riziková míra je *konvexní*, pokud pro každé dvě náhodné veličiny  $X_1$  a  $X_2$  a pro každé  $\lambda \in (0, 1)$  platí

$$\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2).$$

**Tvrzení 2.1.9.**

*Nechť  $\rho$  je pozitivně homogenní riziková míra. Pak  $\rho$  je konvexní právě tehdy, když je subaditivní.*

*Důkaz.*

„ $\Rightarrow$ “

Tvrzení dokážeme nepřímou. Nechť  $\rho$  není subaditivní. Pak existují náhodné veličiny  $X_1, X_2$  a  $\lambda \in (0, 1)$  tak, že

$$\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) > \rho(\lambda X_1) + \rho((1 - \lambda)X_2) = \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2)$$

a  $\rho$  není konvexní.

„ $\Leftarrow$ “

Pro libovolné dvě náhodné veličiny  $X_1, X_2$  a  $\lambda \in (0, 1)$  plyne ze subaditivity následující nerovnost

$$\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \rho(\lambda X_1) + \rho((1 - \lambda)X_2) = \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2),$$

neboť  $\rho$  je pozitivně homogenní. Ověřili jsme, že  $\rho$  je konvexní riziková míra.  $\square$

Jiný důkaz lze najít v Rockafellar [14]. Koherentní rizikové míry jsou konvexní, což umožňuje jejich praktické použití v optimalizaci portfolia.

## 2.2 Value at Risk

V této části ukážeme, že VaR není koherentní míra rizika, neboť není subaditivní. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

**Tvrzení 2.2.1.**

Nechť  $X$  má normální rozdělení se střední hodnotou  $\mu \in \mathbb{R}$  a rozptylem  $\sigma^2$ ,  $\sigma > 0$ . Pak  $\text{VaR}_\alpha(X) = \mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma$ , kde  $\Phi$  je distribuční funkce normálního rozdělení.

*Důkaz.*

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , odtud pak  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  s distribuční funkcí  $\Phi$ .

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X) &= \min\{x \in \mathbb{R}; P[X \leq x] \geq \alpha\} = \\ &= \min\{x \in \mathbb{R}; P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \geq \alpha\} = \\ &= \min\{x \in \mathbb{R}; \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \geq \alpha\} = \\ &= \min\{x \in \mathbb{R}; \frac{x-\mu}{\sigma} \geq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \\ &= \min\{x \in \mathbb{R}; x \geq \mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma\} = \mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma. \end{aligned}$$

□

Právě dokázané tvrzení nám umožňuje vyjádřit Value at Risk v případě normálně rozdělených ztrát ve tvaru, který použijeme v důkazu následující věty.

**Věta 2.2.2.**

- (i)  $\text{VaR}$  je translačně invariantní.
- (ii) Nechť náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  má sdružené normální rozdělení a nechť  $\alpha \geq 0.5$ . Pak  $\text{VaR}_\alpha(X)$  je subaditivní.
- (iii)  $\text{VaR}$  je pozitivně homogenní.
- (iv)  $\text{VaR}$  je monotonní.

*Důkaz.*

(i) Vezměme  $a \in \mathbb{R}$  libovolné a  $X$  libovolnou náhodnou veličinu, pak

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X + a) &= \min\{x \in \mathbb{R}; P[X + a \leq x] \geq \alpha\} = \\ &= \min\{x \in \mathbb{R}; P[X \leq x - a] \geq \alpha\}. \end{aligned}$$



Označme  $v = x - a \in \mathbb{R}$ . Pak

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(X + a) &= \min\{v + a \in \mathbb{R}; P[X \leq v] \geq \alpha\} = \\ &= \min\{v \in \mathbb{R}; P[X \leq v] \geq \alpha\} + a = \text{VaR}_\alpha(X) + a.\end{aligned}$$

(ii) Vezměme  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  náhodný vektor se sdruženě normálním rozdělením, neboli

$$(X_1, X_2)^T \sim N_2 \left( (\mu_1, \mu_2)^T, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right), \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, \\ \rho \in (-1, 1). \text{ Označme } \boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \mu_2)^T, \mathbf{V} := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Pokud  $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{V}$  je pozitivně definitní matice řádu  $n$ , pak platí  $\mathbf{c}^T \mathbf{X} \sim N(\mathbf{c}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}^T \mathbf{V} \mathbf{c})$  pro libovolný vektor  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ .

Vezmeme-li  $\mathbf{c} = (1, 1)^T$ , dostaneme  $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$   
Platí

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2)^2, \quad (2.2)$$

protože  $\rho < 1$ .

Z pozitivní definitnosti varianční matice plyne

$$(1, 1)\mathbf{V}(1, 1)^T = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 > 0. \quad (2.3)$$

Protože platí  $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$  a (2.3), platí také

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2} < \sigma_1 + \sigma_2. \quad (2.4)$$

Použijeme-li odhad (2.4) a tvrzení 2.2.1, dostáváme tak:

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) &= \mu_1 + \mu_2 + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2} \leq \\ &\leq \mu_1 + \mu_2 + \Phi^{-1}(\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) = \text{VaR}_\alpha(X_1) + \text{VaR}_\alpha(X_2),\end{aligned} \quad (2.5)$$

protože  $\Phi^{-1}(\alpha) \leq 0$ , když  $\alpha \geq 0,5$ . Rovnost v (2.5) nastává pro  $\alpha = 0,5$ .

(iii)  
Nechť  $\lambda \neq 0$ .

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(\lambda X) &= \min\{x \in \mathbb{R}; P[\lambda X \leq x] \geq \alpha\} = \\ &= \min\{x \in \mathbb{R}; P\left[X \leq \frac{x}{\lambda}\right] \geq \alpha\}.\end{aligned}$$

Označíme  $\frac{x}{\lambda} = z \in \mathbb{R}$ .

Pak

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(\lambda X) &= \min\{\lambda z \in \mathbb{R}; P[X \leq z] \geq \alpha\} = \\ &= \lambda \min\{z \in \mathbb{R}; P[X \leq z] \geq \alpha\} = \lambda \text{VaR}_\alpha(X).\end{aligned}$$

V případě, že  $\lambda = 0$ , vezmeme  $k \neq 1$  nenulové a jinak libovolné. Z předchozí části důkazu platí

$$\text{VaR}_\alpha(0X) = \text{VaR}_\alpha(0) = \text{VaR}_\alpha(k0) = k\text{VaR}_\alpha(0).$$

Převedením dostaneme

$$(1 - k)\text{VaR}_\alpha(0) = 0.$$

Protože  $1 - k \neq 0$ , můžeme tímto výrazem dělit a dostáváme  $\text{VaR}_\alpha(0) = 0$  a tvrzení je splněno i pro  $\lambda = 0$ .

(iv)

Nechť  $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \forall \omega \in \Omega$ , pak  $P[X_1 \leq x] \geq P[X_2 \leq x]$  (neboť je-li  $X_2(\omega) \leq x$  pro nějaké  $\omega \in \Omega$ , pak i  $X_1(\omega) \leq x$ ), z toho plyne, že

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(X_1) &= \min\{x \in \mathbb{R}; P[X_1 \leq x] \geq \alpha\} \\ &\leq \min\{x \in \mathbb{R}; P[X_2 \leq x] \geq \alpha\} = \text{VaR}_\alpha(X_2).\end{aligned}$$

□

### Příklad 2.2.3.

*Příklad situace, kdy VaR není subaditivní (variace na příklad uvedený v Artzner a kol. [2]):*

Vezměme dvě digitální opce, put opci  $A$  a call opci  $B$  s cenami  $u$  a  $l$  (ceny opce; opční prémie) tak, že  $0 < u < 1000$ ,  $0 < l < 1000$  na stejné podkladové aktivum s tržní cenou  $S_t$  v čase  $t$  s datem splatnosti  $T$ . Digitální call (resp.

put) opce vyplácí pevně zvolenou částku, jestliže cena podkladového aktiva vzroste nad (resp. klesne pod) realizační cenu. Realizační cenu zde budeme značit  $U$  (u opce  $A$ ) resp.  $L$  (u opce  $B$ ). Nechť pro hodnoty  $U$  a  $L \in \mathbb{R}$  platí

$$P(S_T < U) = P(S_T > L) = 0.99; \quad L < U.$$

Budeme pracovat s evropskými opcemi, tj. opci lze uplatnit jen v okamžiku splatnosti  $T$ . Koupíme-li si opci  $A$ , bude výplatní funkce vypadat jako

$$\text{výplata při držení put opce } A := -X_A = \begin{cases} 1000 - u & \text{pokud } S_T < U \\ -u & \text{pokud } S_T \geq U. \end{cases}$$

Výplatní funkce při koupi opce  $B$  bude následující:

$$\text{výplata při držení call opce } B := -X_B = \begin{cases} 1000 - l & \text{pokud } S_T > L \\ -l & \text{pokud } S_T \leq L. \end{cases}$$

Na obr. 4 (5, 6) jsou znázorněny ztráty způsobené vlastnictvím opce  $A$  ( $B$ ,  $A + B$ ) v závislosti na ceně podkladového aktiva v čase  $T$ .

Hodnoty Value at Risk opcí  $A$  a  $B$  přímým výpočtem vyjdou následovně:

$$\text{VaR}_{99\%}(X_A) = -1000 + u,$$

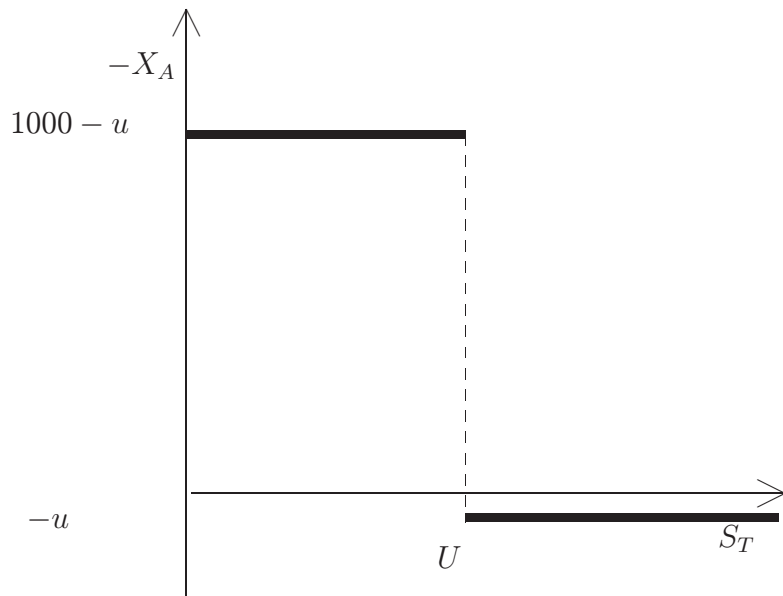
$$\text{VaR}_{99\%}(X_B) = -1000 + l.$$

Držení obou opcí  $A$  i  $B$  dává následující rozložení ztrát:

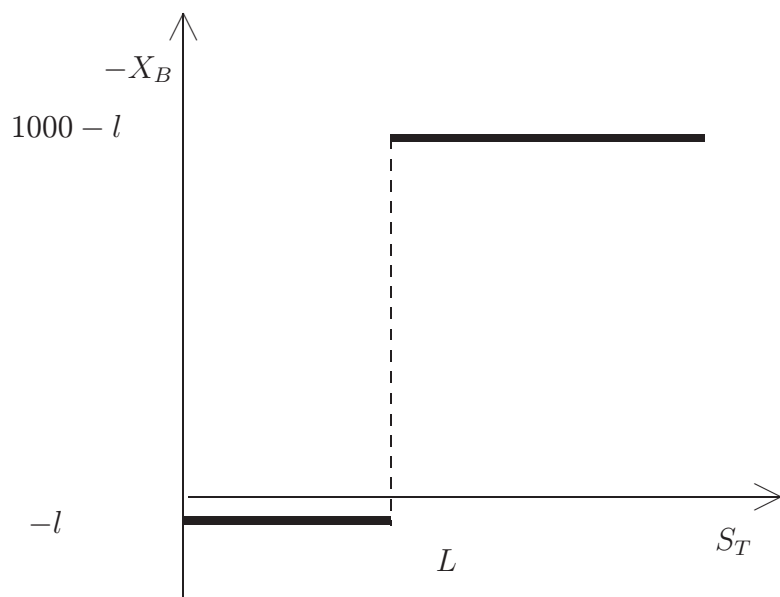
$$X_A + X_B = \begin{cases} -2000 + u + l & \text{s pravděpodobností } 0,99^2 = 0.9801 \quad (L < S_t < U) \\ -1000 + u + l & \text{s pravděpodobností } 0.0199. \end{cases}$$

Z toho snadno vidíme, že  $\text{VaR}_{99\%}(X_A + X_B) = -1000 + u + l$ .

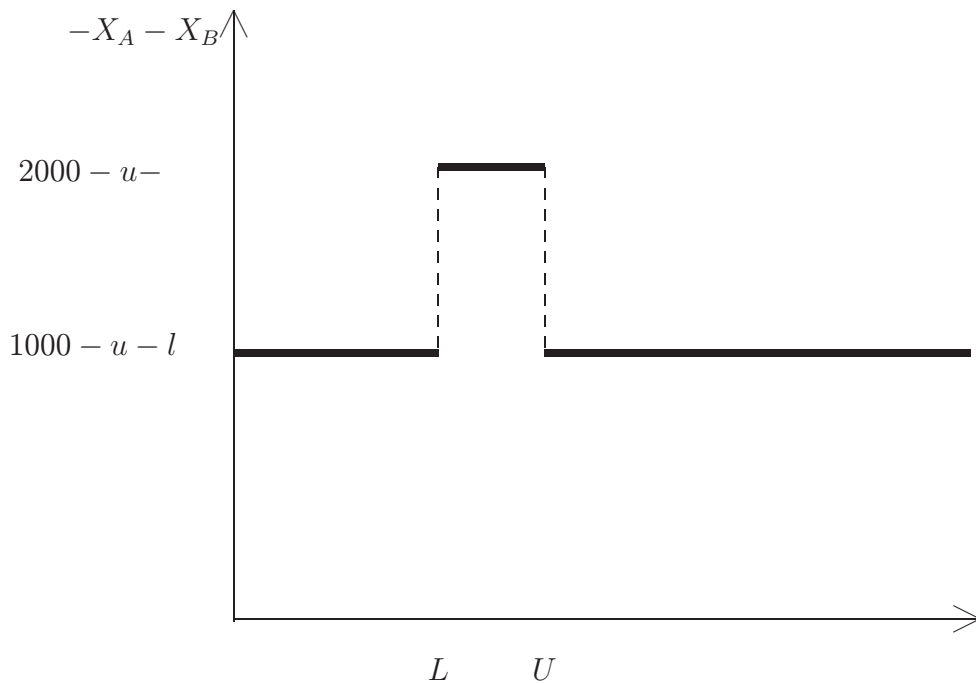
$\text{VaR}(X_A + X_B) > \text{VaR}(X_A) + \text{VaR}(X_B)$  a tedy není splněna subaditivita.



Obrázek 4: Ztráty způsobené držním opce A.



Obrázek 5: Ztráty způsobené držním opce B.



Obrázek 6: Ztráty způsobené držetím opcí A a B.

V této kapitole jsme ukázali, že Value at Risk obecně není koherentní mírou rizika, neboť není subaditivní. Může tudíž nastat situace, kdy se diverzifikací portfolia hodnota Value at Risk zvýší. Nespojité chování Value at Risk může způsobit velkou změnu ohodnocení rizikovosti portfolia při malé změně konfidenční hladiny. Value at Risk navíc není konvexní funkce, což téměř znemožňuje optimalizaci portfolia vzhledem k této rizikové míře.

# Kapitola 3

## Koherentní míra rizika

### 3.1 Conditional Value at Risk

Definici veličiny Conditional Value at Risk zavedli Rockafellar a Uryasev v [16] takto:

**Definice 3.1.1.**

Nechť  $X$  je náhodná veličina, pak *Conditional Value at Risk* (zkráceně CVaR) při zvoleném  $\alpha \in (0, 1)$  definujeme jako

$$\text{CVaR}_\alpha(X) := \text{střední hodnota } \alpha\text{-chvostu } X, \quad (3.1)$$

kde rozdělení  $\alpha$ -chvostu  $X$  má rozdělení s distribuční funkcí  $G_\alpha(x)$ , kde

$$G_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x < \text{VaR}_\alpha(X), \\ \frac{F_X(x) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{pro } x \geq \text{VaR}_\alpha(X). \end{cases} \quad (3.2)$$

Český termín pro CVaR by byl nejspíše *podmíněná hodnota v riziku*.

**Poznámka 3.1.2.**

$G_\alpha(x)$  je skutečně distribuční funkce - je neklesající a zprava spojitá, protože  $F_X(x)$  je neklesající a zprava spojitá;  $G_\alpha(x) \rightarrow 0$ , když  $y \rightarrow -\infty$  a  $G_\alpha(x) \rightarrow 1$ , při  $y \rightarrow \infty$ .

Zavedeme ještě horní a dolní Conditional Value at Risk.

**Definice 3.1.3.**

Nechť  $X$  je náhodná veličina a  $\alpha \in (0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X)^+ &:= \mathbf{E}[X | X > \text{VaR}_\alpha(X)], \\ \text{CVaR}_\alpha(X)^- &:= \mathbf{E}[X | X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Obdobné veličiny najdeme též v práci Acerbi, Tasche [3] pod názvy horní a dolní *Tail Conditional Expectation*. Veličina  $CVaR_\alpha(X)^+$  se někdy nazývá *Mean Shortfall*. Veličinu  $CVaR_\alpha(X)^+$  lze jako (3.3) definovat pouze, pokud  $P[X|X \geq VaR_\alpha(X)] > 0$ , což nastává právě tehdy, když  $F_X(VaR_\alpha(X)) < 1$ , jinak střední hodnota na pravé straně nemá smysl.

Vztahy mezi výše zadanými pojmy rozebereme v následujícím tvrzení.

**Tvrzení 3.1.4.**

*Nechť  $X$  je náhodná veličina a  $\alpha \in (0, 1)$ .*

(i) *Pokud  $P[X = VaR_\alpha(X)] = 0$ , pak*

$$CVaR_\alpha(X)^- = CVaR_\alpha(X) = CVaR_\alpha(X)^+.$$

(ii) *Pokud  $P[X = VaR_\alpha(X)] > 0$ , pak*

a)  *$CVaR_\alpha(X)^- < CVaR_\alpha(X) = CVaR_\alpha(X)^+$ , když*

$$\alpha = F_X(VaR_\alpha(X)),$$

b)  *$CVaR_\alpha(X)^- = CVaR_\alpha(X)$ , když  $F_X(VaR_\alpha(X)) = 1$  ( $CVaR_\alpha(X)^+$  v tomto případě není definována),*

c)  *$CVaR_\alpha(X)^- < CVaR_\alpha(X) < CVaR_\alpha(X)^+$ , pokud*

$$\alpha < F_X(VaR_\alpha(X)) < 1.$$

Důkaz viz Rockafellar a Uryasev [16].

Toto tvrzení ukazuje, že v určitém případě (např. pro spojitě rozdělené náhodné veličiny  $X$ ) se Conditional Value at Risk zjednodušuje na vzorec (3.3).

Označme  $\lambda_\alpha = G_\alpha(VaR_\alpha(X)) = \frac{F_X(VaR_\alpha(X)) - \alpha}{1 - \alpha}$ . Pak  $\lambda_\alpha \in [0, 1]$  a  $\lambda_\alpha = P[X = VaR_\alpha(X)]$ , jak vyplývá z definice  $\alpha$ -chvostu rozdělení  $X$  (3.2).

**Tvrzení 3.1.5.**

Nechť  $X$  je náhodná veličina a  $\alpha \in (0, 1)$ . Pokud  $F_X(\text{VaR}_\alpha(X)) < 1$ , pak  $\lambda_\alpha < 1$  a platí

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \lambda_\alpha \text{VaR}_\alpha(X) + (1 - \lambda_\alpha) \text{CVaR}_\alpha(X)^+.$$

Pokud  $F_X(\text{VaR}_\alpha(X)) = 1$  (a tedy  $\lambda_\alpha = 1$ ), pak  $\text{VaR}_\alpha(X)$  je nejvyšší ztráta, jaká může nastat, a tedy

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X).$$

Důkaz je uveden v Rockafellar a Uryasev [16]. Předchozí tvrzení uvádí, že koherentní míru rizika (kterou Conditional Value at Risk je, jak si ukážeme později) je možno vyjádřit jako konvexní kombinaci dvou rizikových měr, které nejsou koherentní a trpí dalšími nedostatky, které Conditional Value at Risk nemá.

**Tvrzení 3.1.6.**

Nechť  $X$  je náhodná veličina a  $\alpha \in (0, 1)$ . Platí  $\text{CVaR}_\alpha(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)$ . Pokud může nastat větší ztráta než  $\text{VaR}_\alpha(X)$ , tj.  $F_X(\text{VaR}_\alpha(X)) < 1$ , pak  $\text{CVaR}_\alpha(X) > \text{VaR}_\alpha(X)$ .

*Důkaz.*

- a) Pokud  $F_X(\text{VaR}_\alpha(X)) = 1$ , pak z Tvrzení 3.1.5 plyne  $\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X)$  a dokazovaná nerovnost je splněna jako rovnost.
- b) Pokud  $F_X(\text{VaR}_\alpha(X)) < 1$ , pak  $\text{CVaR}_\alpha(X)^+$  je dobře definovaný a z definice  $\text{CVaR}_\alpha(X)^+$  (3.3) a monotonie střední hodnoty dostáváme ostrou nerovnost  $\text{CVaR}_\alpha(X) > \text{VaR}_\alpha(X)$ .

Podle Tvrzení 3.1.5

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X) &= \lambda_\alpha(X) \text{VaR}_\alpha(X) + (1 - \lambda_\alpha(X)) \text{CVaR}_\alpha(X)^+ > \\ &> \lambda_\alpha(X) \text{VaR}_\alpha(X) + (1 - \lambda_\alpha(X)) \text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X). \end{aligned}$$

□

V praxi často skutečné pravděpodobnostní rozdělení náhodných veličin aproximujeme pomocí diskrétních rozdělení, kdy pracujeme pouze s konečnou množinou možných realizací náhodných parametrů. O těchto realizacích hovoříme také jako o scénářích. Pracujeme tak se skokovou distribuční funkcí  $F_X$ . V následujícím tvrzení si ukážeme, jak lze modifikovat výpočet CVaR a VaR právě v diskrétním případě.



**Věta 3.1.7.** *Nechť je rozdělení náhodné veličiny  $X$  soustředěno v konečně mnoha bodech  $\{x_k, k = 1, \dots, N\}$ , a  $F_X$  je skoková distribuční funkce se skoky v těchto bodech. Nechť dále platí  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Označme  $P[X = x_k] = p_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Nechť  $k_\alpha$  je takový index z množiny  $\{1, \dots, N\}$ , že*

$$\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \geq \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k.$$

*Pak platí:*  $VaR_\alpha(X) = x_{k_\alpha}$ ,

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) x_{k_\alpha} + \sum_{k=k_\alpha+1}^N p_k x_k \right],$$

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) \leq \frac{p_{k_\alpha}}{p_{k_\alpha} + \dots + p_N}.$$

Důkaz lze najít v Rockafellar a Uryasev [16]. Vidíme, že při znalosti rozdělení diskrétní náhodné veličiny můžeme snadno spočítat Conditional Value at Risk pro danou konfidenční hladinu.

Jednou z velkých předností rizikové míry CVaR je, že ji můžeme vyjádřit jako řešení konvexní optimalizační úlohy. Toto ekvivalentní vyjádření poprvé odvodili Rockafellar a Uryasev v [15] pro případ spojitého rozdělení ztrát. V práci Rockafellar a Uryasev [16] je rovnost dokázána pro obecné rozdělení. Příslušnou větu si zde bez důkazu uvedeme:

**Věta 3.1.8.** *Nechť  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $X$  je náhodná veličina,  $a \in \mathbb{R}$ . Označme*

$$H_\alpha(a) := a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X - a]^+.$$

*Pak  $H_\alpha(a)$  je omezená a konvexní (tedy i spojitá) funkce a platí*

$$CVaR_\alpha(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} H_\alpha(a).$$

*Navíc  $VaR_\alpha(X)$  je levý koncový bod a  $VaR^\alpha(X)$  je pravý koncový bod neprázdného, uzavřeného a omezeného intervalu  $\operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}} H_\alpha(a)$  (tento interval může být i jednobodový), speciálně*

$$VaR_\alpha(X) \in \operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}} H_\alpha(a),$$

a tedy

$$CVaR_\alpha(X) = H_\alpha(VaR_\alpha(X)).$$

V některých pracech (např. Pflug [13]) je Conditional Value at Risk definován přímo pomocí této minimalizační formule.

**Věta 3.1.9.** *Nechť  $\alpha \in (0, 1)$  a  $V$  je množina reálných náhodných veličin. Pak  $CVaR_\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  je koherentní míra rizika.*

*Důkaz.*

(i) CVaR je subaditivní:

Pro libovoná  $A, B \in \mathbb{R}$  platí

$$\max\{A + B, 0\} \leq \max\{A, 0\} + \max\{B, 0\},$$

protože

$$A + B \leq \max\{A, 0\} + \max\{B, 0\}$$

a zároveň

$$0 < \max\{A, 0\} + \max\{B, 0\}.$$

Uvažujeme-li  $X_1, X_2 \in V$ , pak pro každé  $\omega \in \Omega$  a pro všechna  $b, c \in \mathbb{R}$  platí

$$[X_1(\omega) + X_2(\omega) - b - c]^+ \leq [X_1(\omega) - b]^+ + [X_2(\omega) - c]^+$$

a tedy také

$$[X_1 + X_2 - b - c]^+ \leq [X_1 - b]^+ + [X_2 - c]^+.$$

Z monotonie střední hodnoty víme, že platí také

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2 - b - c]^+ \leq \mathbf{E}[X_1 - b]^+ + \mathbf{E}[X_2 - c]^+. \quad (3.4)$$

Pro náhodnou veličinu  $X$  a  $\alpha \in (0, 1)$  označme

$$K_{X,\alpha}(a) := a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X - a]^+, \quad a \in \mathbb{R}$$

a

$$L_{X,\alpha} := \operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}} K_{X,\alpha}(a).$$

Vezměme  $b \in L_{X_1, \alpha}$  a  $c \in L_{X_2, \alpha}$ .

Dle (3.4) pak platí

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X_1) + \text{CVaR}_\alpha(X_2) &= \min_{a \in \mathbb{R}} K_{X_1, \alpha}(a) + \min_{a \in \mathbb{R}} K_{X_2, \alpha}(a) = \\ &= b + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_1 - b]^+ + c + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_2 - c]^+ \geq \\ &\geq b + c + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_1 + X_2 - b - c]^+. \end{aligned}$$

Pak také dostáváme, že

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X_1) + \text{CVaR}_\alpha(X_2) &\geq \min_{b+c \in C_\alpha} \left\{ b + c + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_1 + X_2 - b - c]^+ \right\} \geq \\ &\geq \min_{b+c \in C_\alpha} \left\{ b + c + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_1 + X_2 - b - c]^+ \right\} = \text{CVaR}_\alpha(X_1 + X_2) \end{aligned}$$

kde  $C_\alpha = \{b + c \in \mathbb{R}; b \in L_{X_1, \alpha}, c \in L_{X_2, \alpha}\}$  a druhá nerovnost platí, neboť na pravé straně počítáme minimum přes větší množinu.

(ii) CVaR je monotonní:

Pro libovolná  $A \leq B \in \mathbb{R}$  platí

$$\max\{A, 0\} \leq \max\{B, 0\}.$$

Nechť  $X_1, X_2 \in V$  jsou náhodné veličiny takové, že platí  $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$  pro každé  $\omega \in \Omega$ . Pak pro každé  $a \in \mathbb{R}$  platí

$$\max\{X_1(\omega) - a, 0\} \leq \max\{X_2(\omega) - a, 0\} \quad \forall \omega \in \Omega$$

neboli

$$[X_1(\omega) - a]^+ \leq [X_2(\omega) - a]^+ \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Monotonie střední hodnoty nám dává

$$\mathbf{E}[X_1(\omega) - a]^+ \leq \mathbf{E}[X_2(\omega) - a]^+ \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (3.5)$$

Nechť  $K_{X, \alpha}$  a  $L_{X, \alpha}$  označují stejnou funkci a množinu jako v předchozí části důkazu. Vezměme  $a \in L_{X_1, \alpha}$ ,  $b \in L_{X_2, \alpha}$ . Pak platí

$$\text{CVaR}_\alpha(X_1) = a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_1 - a]^+.$$

S použitím nerovnosti (3.5) dostáváme

$$CVaR_\alpha(X_1) \leq a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_2 - a]^+.$$

Protože  $b$  minimalizuje  $K_{X_2, \alpha}$ , platí také

$$CVaR_\alpha(X_1) \leq b + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[X_2 - b]^+ = CVaR_\alpha(X_2).$$

(iii),(iv) Důkaz splnění vlastností pozitivní homogenity a translační invariance by proběhl obdobně; lze ho také nalézt v Pflug [13].  $\square$

Conditional Value at Risk je konzistentní s Value at Risk ve smyslu, že při některých rozděleních (mezi něž patří normální rozdělení) je výsledkem optimalizační úlohy stejné portfolio. Conditional Value at Risk může být vyjádřen minimalizační formulí, která může být využita v optimalizačních algoritmech. Koherence podmíněného Value at Risk zaručuje konvexitu, jak plyne z tvrzení 2.1.9.

## 3.2 Expected shortfall

V předchozí podkapitole jsme si ukázali přístup Rockafellara a Uryaseva [16], jak konstruovat koherentní rizikovou míru, která by v sobě obsahovala informaci i o ztrátách nad hodnotou Value at Risk. Obdobný přístup zvolili také Acerbi a Tasche v [3], kde odvodili rizikovou míru Expected Shortfall. Jejich odvození si zde přiblížíme. Na závěr kapitoly ukážeme, že oba přístupy vedou k těmž.

Představme si, že máme  $\alpha \in (0, 1)$  a  $N \in \mathbb{N}$  realizací náhodné veličiny  $X$ . Označme je  $x_i, i = 1, \dots, N$ . Uspořádejme tyto realizace podle velikosti:  $x_{1:N} \leq \dots \leq x_{N:N}$  a aproximujme počet realizací, které tvoří  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  nejhorších případů ztrát portfolia pomocí  $N - \lceil N\alpha \rceil + 1$ , kde  $\lceil x \rceil$  je horní celá část, tj.  $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z}; n \geq x\}$ . Jinak řečeno, množina  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  nejhorších případů je tvořena ztrátami  $\{x_{\lceil N\alpha \rceil:N}, \dots, x_{N:N}\}$ . Dolní  $\alpha$ -kvantil  $X$  lze přirozeně odhadnout pomocí empirického kvantilu  $q_\alpha^N(X) = x_{\lceil N\alpha \rceil:N}$ . Odhad pro očekávanou ztrátu v  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  nejhorších případů, který označíme

$ES_\alpha^N$ , pak vyjádříme jako průměr z  $N - \lceil N\alpha \rceil + 1$  největších ztrát, tj.

$$ES_\alpha^N(X) := \frac{\sum_{i=\lceil N\alpha \rceil}^N x_{i:N}}{N - \lceil N\alpha \rceil + 1}.$$

Odtud  $ES_\alpha^N$  splňuje subaditivitu, neboť platí

$$\begin{aligned} ES_\alpha^N(X + Y) &= \frac{\sum_{i=\lceil N\alpha \rceil}^N (x + y)_{i:N}}{N - \lceil N\alpha \rceil + 1} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{i=\lceil N\alpha \rceil}^N (x_{i:N} + y_{i:N})}{N - \lceil N\alpha \rceil + 1} = \\ &= ES_\alpha^N(X) + ES_\alpha^N(Y). \end{aligned}$$

Označme  $I_B$  indikátorovou funkci množiny  $B$ , tj.  $I_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B, \\ 0 & x \notin B. \end{cases}$

Definici  $ES_\alpha^N$  můžeme rozepsat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} ES_\alpha^N(X) &= \frac{\sum_{i=\lceil N\alpha \rceil}^N x_{i:N}}{N - \lceil N\alpha \rceil + 1} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{i:N} I_{\{i \geq \lceil N\alpha \rceil\}}}{N - \lceil N\alpha \rceil + 1} = \\ &= \frac{1}{N - \lceil N\alpha \rceil + 1} \left( \sum_{i=1}^N x_{i:N} I_{\{x_{i:N} \geq x_{\lceil N\alpha \rceil:N}\}} + \sum_{i=1}^N x_{i:N} (I_{\{i \geq \lceil N\alpha \rceil\}} - I_{\{x_{i:N} \geq x_{\lceil N\alpha \rceil:N}\}}) \right) = \\ &= \frac{N}{N - \lceil N\alpha \rceil + 1} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{i:N} I_{\{x_{i:N} \geq x_{\lceil N\alpha \rceil:N}\}} + \right. \\ &\quad \left. + x_{\lceil N\alpha \rceil:N} \left( \frac{N - \lceil N\alpha \rceil + 1}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{x_{i:N} \geq x_{\lceil N\alpha \rceil:N}\}} \right) \right). \end{aligned}$$

Nahradíme-li v posledním vzorci odhad kvantilu teoretickým kvantilem apod., dostaneme vzorec

$$\frac{1}{1 - \alpha} \left( \mathbf{E}[X I_{\{X \geq q_\alpha\}}] + q_\alpha(1 + \alpha - P[X \geq q_\alpha]) \right).$$

Podobným způsobem odvodili Acerbi a Tasche v práci [3] veličinu Expected Shortfall. Uvádíme definici upravenou pro případ, kdy  $X$  reprezentuje náhodné ztráty.

**Definice 3.2.1.** Nechť  $X$  je náhodná veličina, která reprezentuje ztrátu nějakého portfolia za časový interval  $T$ . Nechť  $\alpha \in (0, 1)$  je konfidenční hladina. Pak definujeme *Expected Shortfall na konfidenční hladině  $\alpha$*  jako:

$$ES_\alpha(X) := \frac{1}{1-\alpha} \left( \mathbf{E}[XI_{\{X \geq q_\alpha\}}] - q_\alpha \{P[X \geq q_\alpha] - (1-\alpha)\} \right). \quad (3.6)$$

**Poznámka 3.2.2.**

Druhý člen ve vztahu (3.6)  $q_\alpha \{P[X \geq q_\alpha] - (1-\alpha)\}$  je možné interpretovat jako přesahující část, která musí být odečtena od střední hodnoty  $\mathbf{E}[XI_{\{X \geq q_\alpha\}}]$  v případě, že jev  $\{X \geq q_\alpha\}$  má pravděpodobnost větší než  $1-\alpha$ . Pokud naopak  $P[X \geq q_\alpha] = 1-\alpha$  (což platí vždy, má-li  $X$  spojitě rozdělení), druhý člen ve vztahu (3.6) vymizí a v tomto případě tedy platí

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[XI_{\{X \geq q_\alpha\}}] = \mathbf{E}[X|X \geq q_\alpha] = \text{CVaR}_\alpha^-.$$

**Tvrzení 3.2.3.** Nechť  $\alpha \in (0, 1)$ . Pak  $ES_\alpha$  je koherentní míra rizika.

Tvrzení bylo dokázáno v Acerbi a Tasche [3].

Expected Shortfall má ekvivalentní vyjádření, ze kterého jsou patrné její další dobré vlastnosti.

**Tvrzení 3.2.4.** Nechť  $X$  je reálná náhodná veličina s distribuční funkcí  $F_X$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Pak platí

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_t dt, \quad \text{kde } q_t \text{ je dolní kvantil } X$$

Důkaz tohoto tvrzení lze najít v Acerbi, Tasche [3].

Z této ekvivalentní formule je zřejmá spojitost Expected Shortfall v  $\alpha$ , což je vlastnost, kterou Value at Risk nespĺňuje, ale která je přesto důležitá, jak jsme již v této kapitole zmínili (viz komentář k obrázku 2).

Na závěr kapitoly uvedme tvrzení, které dokázali Acerbi a Tasche v [3] a které ukazuje, že dvě koherentní míry rizika, kterými jsme se tu zabývali, jsou jen jinými vyjádřeními téhož.

**Tvrzení 3.2.5.** Nechť  $X$  je integrovatelná náhodná veličina a  $\alpha \in (0, 1)$ . Pak

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = ES_\alpha(X).$$

Conditional Value at Risk je univerzální míra rizika - může být použita na téměř všechny typy rizika. Dokonce může ohodnotit portfolio, které je vystaveno několika různým druhům rizika. Oproti Value at Risk navíc dává přehled o největších možných ztrátách, které mohou nastat.

V této kapitole jsme představili koherentní míry rizika Expected Shortfall a Conditional Value at Risk. Vychází z podobné myšlenky - zahrnout do měření rizika největší možné ztráty, které Value at Risk opomíjí, a splňovat vlastnost koherence. Ukázali jsme, že jsou dokonce různými vyjádřeními stejné rizikové míry.

# Kapitola 4

## Optimalizace portfolia vzhledem k VaR a CVaR

### 4.1 Optimalizační modely

Uvažujme  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , náhodný vektor reprezentující ztráty aktiv  $1, \dots, n$ . Nechť  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$  jsou částky investované do těchto aktiv. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že celková investovaná částka se rovná jedné, tj  $\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{1} = 1$ . Celkovou ztrátu portfolia reprezentujeme náhodnou veličinou  $Y = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{X}$ . Zapišeme úlohu minimalizace hodnoty Value at Risk za podmínky, že očekávaný výnos (tj. střední hodnota výnosu) portfolia nespadne pod nějakou předem danou hladinu  $\mu$ .

$$\left\| \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n} \text{VaR}_\alpha(\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{X}) \\ \text{za podmínek} \\ -\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{E}\mathbf{X} \geq \mu, \\ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{1} = 1, \\ \boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Podobně můžeme zapsat úlohu optimalizace portfolia pomocí CVaR:



$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{array}{l} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{CVaR}_\alpha(\gamma^T \mathbf{X}) \\ \text{za podmínek} \\ -\gamma^T \mathbf{E}\mathbf{X} \geq \mu, \\ \gamma^T \mathbf{1} = 1, \\ \gamma \geq \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Předpokládejme, že hledáme optimální portfolio vzhledem k rizikové míře. Uvažujeme scénáře  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  (tedy máme  $N$  možných realizací náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ ). Předokládejme, že celková ztráta portfolia pak nabývá každé z hodnot  $\gamma^T \mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  s pravděpodobností  $1/N$ . Očekávaný výnos portfolia má tedy tvar  $\mathbf{e} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$ . Označme  $M_{i:N}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , funkci, která  $N$ -tici čísel přiřadí  $i$ -tou nejmenší hodnotu. Pak můžeme výše uvedené optimalizační úlohy přepsat následovně:

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{array}{l} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} M_{[\alpha N]:N}(\gamma^T \mathbf{x}_1, \dots, \gamma^T \mathbf{x}_N) \\ \text{za podmínek} \\ \gamma^T \mathbf{e} \geq \mu, \\ \gamma^T \mathbf{1} = 1, \\ \gamma \geq \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{array}{l} \min_{\gamma, a, z \in \mathbb{R}} a + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{i=1}^N z_i \\ \text{za podmínek} \\ z_i - \gamma^T \mathbf{x}_i + a \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \\ \gamma^T \mathbf{e} \geq \mu, \\ \gamma^T \mathbf{1} = 1, \\ z^i \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \\ \gamma \geq \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Veličina  $z_i$  zde nahrazuje  $[\gamma^T \mathbf{X} - a]^+$ . Pokud je  $\gamma^T \mathbf{X} - a$  nezáporné, pak minimální  $z_i$ , které je větší než  $\gamma^T \mathbf{X} - a$  je přímo  $\gamma^T \mathbf{X} - a$ . Pokud je naopak  $\gamma^T \mathbf{X} - a$  záporné, pak minimální nezáporná hodnota  $z_i$  větší než  $\gamma^T \mathbf{X} - a$

je nula.

Uvedené optimalizační modely jsme převzali z Pflug [13].

Úloha optimalizace portfolia vzhledem k Value at Risk (4.1), (4.3) je obtížně řešitelná, neboť  $\text{VaR}(\gamma^T \mathbf{X})$  není konvexní (viz tvrzení (2.1.9)) a v mnoha bodech dokonce není diferencovatelná, jak uvádí Gaivoronski a Pflug v [8]. Protože není splněna konvexita, může mít účelová funkce více lokálních minim. Body, ve kterých účelová funkce není diferencovatelná, vylučují použití mnohých metod nelineární optimalizace.

Optimalizace vzhledem k CVaR je úloha lineárního programování, a je tedy snadno řešitelná.

## 4.2 Numerický příklad

V této podkapitole budeme hledat optimální rozložení akcií deseti společností v portfoliu tak, abychom minimalizovali rizikovou míru CVaR za předpokladu určitého očekávaného výnosu.

Pro tento numerický příklad jsme zvolili náhodně deset společností zahrnutých do indexu NASDAQ-100 dne 12. 7. 2007. Index NASDAQ-100 je tvořen stovkou největších technologických akciových společností obchodovaných na akciovém trhu NASDAQ. Náhodně vybrané společnosti jsou:

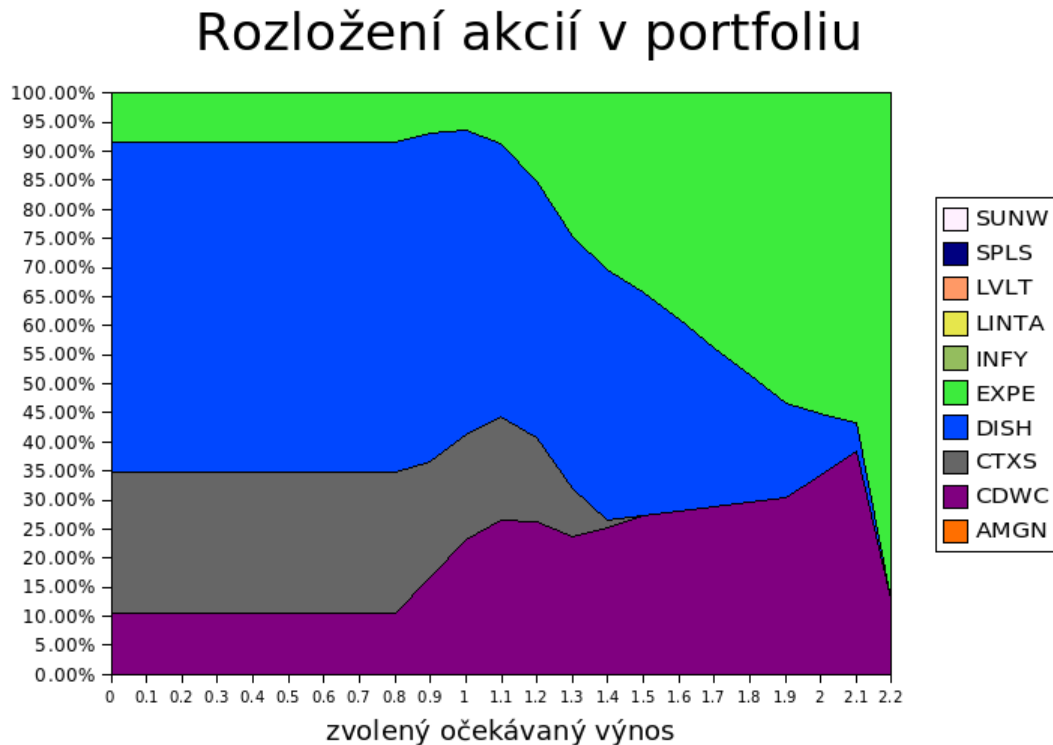
Amgen Inc. (AMGN),  
CDW Corporation (CDWC),  
Citrix Systems, Inc. (CTXS),  
Echo Star Communications Corporation (DISH),  
Expedia, Inc. (EXPE),  
Infosys Technologies Limited (INFY),  
Level 3 Communications, Inc. (LVLT),  
Liberty Media Corporation (LINTA),  
Staples, Inc. (SPLS) a  
Sun Microsystems, Inc. (SUNW).  
Data byla stažena z <http://finance.yahoo.com/>.

Zvolili jsme hladinu spolehlivosti  $\alpha = 0.95$ . Jako scénáře použijeme historické hodnoty týdenních výnosů z období od 20. 2. 2007 do 23. 7. 2007 (celkem tedy 107 dní). Týdenní výnosy vypočteme z denních uzavíracích

kurzů následujícím způsobem:  $v_{t+7} = \frac{p_{t+7} - p_t}{p_t}$   $t \in \{1, \dots, 100\}$ , kde  $v_{t+7}$  označuje týdenní výnos mezi dny  $t$  a  $t + 7$ . Cenu akcie ve dni  $t$  značíme  $p_t$ . Pro jednoduchost zanedbáváme dividendové výnosy. Minimální hladinu očekávaného výnosu necháme probíhat v intervalu od 0 do 0.2 s krokem 0,001.

Pro řešení optimalizační úlohy (4.4) byla použita studentská edice programu AMPL [1], úlohy byly řešeny pomocí řešiče CPLEX 10.1.0. Výstup programu a data jsou uvedeny v dodatku.

Obrázek 7 znázorňuje rozložení portfolia pro všechny testované hodnoty očekávaného výnosu.



Obrázek 7: Rozložení akcií v portfoliu.

Můžeme si povšimnout, že akcie vybrané do portfolia (pro některou z hodnot zvoleného očekávaného výnosu) jsou právě ty, jejichž průměrný výnos (viz Tabulka 1) je kladný. Dále vidíme, že v levé polovině Grafu 1 tvoří větší část akcie DISH a CTXS, které mají nižší rozptyl výnosů. V pravé polovině Grafu 1 pak převažují akcie EXPE a CDWC, které mají největší průměrné výnosy, ale i vyšší rozptyl výnosů.

	průměr (v %)	rozptyl (v %)	max (v %)	min (v %)
AMGN	-0,97	0,003	0,1	-0,15
CDWC	2,17	0,002	0,13	-0,09
CTXS	0,83	0,001	0,1	-0,06
DISH	0,4	0,001	0,09	-0,07
EXPE	2,2	0,004	0,25	-0,1
INFY	-0,45	0,002	0,1	-0,13
LVLT	-0,5	0,002	0,1	-0,14
LINTA	-0,21	0,002	0,11	-0,08
SPLS	-0,55	0,001	0,05	-0,09
SUNW	-0,99	0,002	0,07	-0,14

Tabulka 1: Vybrané charakteristiky týdenních výnosů.

# Kapitola 5

## Závěr

V předložené práci jsme uvedli důležité pojmy z historie měření rizika. Zhodnotili jsme slabiny v současné době nejpoužívanější rizikové míry Value at Risk a uvedli jsme důkaz jejích vlastností. Na příkladu dvou digitálních opcí jsme ilustrovali situaci, kdy VaR není subaditivní. Popsali jsme rizikovou míru Conditional Value at Risk, dokázali jsme její koherenci, ukázali jsme, že optimalizace portfolia vzhledem k této rizikové míře je úlohou lineárního programování a pro ilustraci jsme numericky spočítali úlohu optimalizace portfolia složeného z akcií deseti společností zahrnutých v indexu NASDAQ-100. Zmínili jsme také rizikovou míru Expected Shortfall a uvedli jsme její vztah k rizikové míře Conditional Value at Risk.

# Literatura

- [1] AMPL: [www.ampl.com](http://www.ampl.com).
- [2] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999): Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* **9** (3), 203-228.
- [3] Acerbi C., Tasche D. (2002): On the Coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking & Finance* **26** (7), 1487-1503.
- [4] Acerbi C., Tasche D. (2002): Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk. *Economic Notes* **31** (2), 379-388.
- [5] Cipra T. (2002): Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví. Ekopress, s.r.o., Praha.
- [6] Domar E. D., Musgrave R. A. (1944): Proportional Income Taxation and Risk-Taking. *The Quarterly Journal of Economics* **58** (3), 388-422.
- [7] Evropská komise (2006): Novelizovaný rámec pro konzultace o Solventnosti II. [ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/markt-2506-04/amended\\_framework\\_cs.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2506-04/amended_framework_cs.pdf).
- [8] Gaivoronski A. A., Pflug G. (2004-2005): Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach. *Journal of Risk* **7** (2), 1-31.
- [9] Holton G. A. (2002): History of Value-at-Risk: 1922-1998. Method and Hist of Econ Thought 0207001, EconWPA.
- [10] Jorion P.: *Orange County Case*, [www.gsm.uci.edu/jorion/oc/case.html](http://www.gsm.uci.edu/jorion/oc/case.html).
- [11] Kataoka S. (1963): A Stochastic Programming Model. *Econometrica* **31** (1/2), 181-196.

- [12] Markowitz H. M. (1998): Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments (2. vyd.). Blackwell Publishers Inc., Massachusetts.
- [13] Pflug G. (2000): Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. Uryasev S.(ed.) Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications. Kluwer Academic Publishers.
- [14] Rockafellar, R. T. (1970): Convex Analysis. Princeton University Press, New Jersey.
- [15] Rockafellar R. T., Uryasev S. (2000): Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk* **2** (3), 21-41.
- [16] Rockafellar R. T., Uryasev S. (2002): Conditional Value-at-Risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance* **26** (7), 1443-1471.
- [17] Tasche D. (2000): Conditional expectation as quantile derivative (Technical report). TU München.

# Dodatek

Jako vstup do programu AMPL byly použity dva soubory **port0.mod** a **port0.txt**. Pro zvolený očekávaný výnos rovný 0.001 vypadají tyto soubory následovně (celé soubory lze pod stejnými názvy najít na přiloženém CD).

Soubor **port0.mod**:

```
set SPOL;
param zac;
param n>zac;
set N:= zac .. n;

param priceN, SPOL;
param al;
param mu;
var x j in SPOL>=0;
var z i in N>=0;
var a;

minimize Cvar: a + sum i in N z[i]*(1/(1-al)) *(1/n);
subject to
OmezAi in N: z[i]-sumj in SPOL x[j] * (-price[i,j]) + a>=0;
OmezB: sumj in SPOL x[j] * (1/n) * (sum i in N price[i,j])>=mu;
OmezC: sum j in SPOLx[j]=1;
```

Soubor **port0.txt**:

```
set SPOL := AMGN CDWC CTXS DISH EXPE INFY LVLTA LINTA SPLS SUNW;
```



```

param zac:=1;
param n:=100;
param al:=0.95;
param price: AMGN CDWC CTXS DISH EXPE INFY LVLTA LINTA SPLS SUNW:=
1      0.0151921358356 0.0012915345779 0.0543202927104
0.0145091815915 -0.0973301791146 0.0325 -0.0294599018003
-0.000880281690141 -0.00725513905683 -0.0257826887661
      :
100    -0.0700828937453 -0.0500625782228 -0.00976377952756
-0.0113504748668 -0.0603060306031 -0.101818181818 -0.0335877862595
-0.0325236722931 -0.0798548094374 -0.0532915360502
;
param mu:=0.001;

```

### Příkazy zadané do programu AMPL:

```

option solver cplex;
model port0.mod;
data port0.txt;
solve;
display z; display a; display x;

```

**Výstup programu AMPL** (pro všechny zvolené hodnouty očekávaného výnosu použité v příkladě lze výstupy nalézt na CD v souborech **ampl\_vystup $\mu$ .txt**, kde  $\mu$  označuje příslušný zvolený očekávaný výnos):

```

CPLEX 10.1.0: optimal solution; objective 0.02383224515
25 dual simplex iterations (6 in phase I)
z [*] :=
1 0 26 0 51 0 76 0
2 0 27 0 52 0 77 0
3 0 28 0 53 0 78 0
4 0 29 0 54 0 79 0
5 0 30 0 55 0 80 0
6 0 31 0 56 0 81 0
7 0 32 0.00564968 57 0 82 0
8 0 33 0 58 0 83 0

```

```

9 0 34 0 59 0 84 0
10 0 35 0 60 0 85 0
11 0 36 0 61 0 86 0
12 0 37 0 62 0 87 0
13 0 38 0 63 0 88 0
14 0 39 0 64 0 89 0
15 0 40 0 65 0 90 0
16 0 41 0 66 0 91 0
17 0 42 0 67 0 92 0
18 0 43 0 68 0 93 0
19 0 44 0 69 0 94 0
20 0 45 0 70 0 95 0
21 0 46 0 71 0 96 0
22 0 47 0 72 0 97 0
23 0 48 0 73 0 98 0.00709554
24 0 49 0 74 0 99 0.0109904
25 0 50 0 75 0 100 0
;
  a = 0.0190851

  x [*] :=
AMGN 0
CDWC 0.10446
CTXS 0.244591
DISH 0.567631
EXPE 0.0833177
INFY 0
LINTA 0
LVLT 0
SPLS 0
SUNW 0
;

```

Na základě hodnot vektorů  $x$  byl vytvořen Obrázek 7 v programu OpenOffice.org Calc.

## Obsah příloženého CD:

bc\_prace.pdf  
prices0.mod  
port0.txt  
ampl\_vystup0.txt  
ampl\_vystup0.02.txt  
ampl\_vystup0.022.txt  
ampl\_vystup0.021.txt  
ampl\_vystup0.01.txt  
ampl\_vystup0.019.txt  
ampl\_vystup0.018.txt  
ampl\_vystup0.017.txt  
ampl\_vystup0.016.txt  
ampl\_vystup0.015.txt  
ampl\_vystup0.014.txt  
ampl\_vystup0.013.txt  
ampl\_vystup0.012.txt  
ampl\_vystup0.011.txt  
ampl\_vystup0.009.txt  
ampl\_vystup0.008.txt  
ampl\_vystup0.007.txt  
ampl\_vystup0.006.txt  
ampl\_vystup0.005.txt  
ampl\_vystup0.004.txt  
ampl\_vystup0.003.txt  
ampl\_vystup0.002.txt  
ampl\_vystup0.001.txt