Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Janečková

Aplikace 2-dimenzionálních rozdělení v bankovnictví

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr.Karel Vaníček
Studijní program:	Obecná matematika
Studijní plán:	Finanční a pojistná matematika

2007

Poděkování

Ráda bych poděkovala Mgr.Karlu Vaníčkovi za zajímavé téma, cenné rady a věcné připomínky.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 13.7.2007 Barbora Janečková

Obsah

1 Úvod **6**

2 Základní pojmy **7**

3 Kopuly **9**

3.1 Vlastnosti kopul 9

3.2 Sklarova věta 11

4 Kopula a náhodné veličiny **12**

4.1 Nezávislé náhodné veličiny 12

4.2 Transformace 12

4.3 Fréchetovy-Hoeffdingovy meze 14

4.4 Kopuly přežití 14

4.5 Uspořádání 15

4.6 Generování jevů 15

5 Míry závislosti **17**

5.1 Lineární korelace 17

5.2 Perfektní závislost 18

5.3 Konkordance 18

5.4 Kendalovo τ a Spearmanovo ρ 19

5.5 Závislost na chvostech 21

6 Rodiny kopul **23**

6.1 Marshall-Olkinovy kopuly 23

6.2 Eliptické kopuly 25

6.3 Archimédovské kopuly 25

7 Aplikace **29**
7.1 Odhad marginálních rozdělení 30
7.2 Parametrický odhad kopuly 33
7.3 Neparametrický odhad kopuly 34
7.4 Výběr vhodné kopuly 34

8 Závěr **36**

Literatura **37**

Název práce: Aplikace 2-dimenzionálních rozdělení v bankovnictví
Autor: Barbora Janečková
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr.Karel Vaníček

Abstrakt: Tato práce se zabývá kopulovými funkcemi a jejich aplikacemi ve finančním managementu. Definuje kopuli, uvádí základní vlastnosti a Sklarovu větu. Poté studuje podrobněji vlastnosti související s náhodnými veličinami, definuje kopuli přežití a předvádí algoritmus generování náhodných jevů z daného sdruženého rozdělení. Dále popisuje a porovnává různé míry závislosti náhodných veličin. Nejdůležitější částí práce je charakteristika různých rodin kopulí, jejich srovnání a následná aplikace. Na konkrétních datech je popsán algoritmus hledání marginálních rozdělení a výběru Archimédovské kopuly, která nejlépe odhaduje sdružené rozdělení daných dat.

Klíčová slova: kopula, Kendallovo τ, závislost na chvostech, sdružené riziko

Title: Banking Application of 2-dimensional Distributions
Author: Barbora Janečková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr.Karel Vaníček

Abstract: This work deals with copulas and their aplications in finance management. We define copula, introduce basic properties and Sklar's theorem. Than we detail properties related to random variables, define survival copula and present the algorithm of generating a sample from specified joint distribution. Further we describe and compare various dependence measures of random variables. In the most important section we characterize various families of copulas, compare them and bring the algorithm of choosing margins and the Archimedean copula that better fits to data.

Keywords: copula, Kendall's τ, tail dependence, joint risk

Kapitola 1

Úvod

Teorie 2-dimenzionálních rozdělení je v současné době velmi důležitá ve finanční matematice, speciálně v bankovnictví se stále častěji v souvislosti s odhadováním celkového rizika objevuje pojem kopula. Kopulová funkce nabízí nový teoretický pohled na vícerozměrné modelování, což s sebou přináší i důležité praktické aplikace. Odhady pomocí kopul jsou sice více komplikované než jiné metody, ale jsou přesnější a tedy mohou mít větší uplatnění.

Základní myšlenkou je, že sdružená distribuční funkce může být rozdělena na marginály a funkci nazývanou kopula, která zcela určuje jejich vzájemný vztah. Slovo kopula pochází z anglického *coupling* - spojení, tedy intuitivně kopula spojuje marginální rozdělení určitým vztahem a společně tvoří sdružené rozdělení.

K nalezení sdružené distribuční funkce tedy potřebujeme znát marginální rozdělení a kopulovou funkci. Jak odhadnout marginální rozdělení a jak zvolit správnou kopulovou funkci jsou otázky, jimiž se bude tato bakalářská práce zabývat.

Kapitola 2

Základní pojmy

Na začátek zaveďme některé základní pojmy, které budou v dalších kapitolách běžně používány.
Uvažujme náhodné veličiny X_1, X_2 definované na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P).

Definice 1 *Náhodný vektor* $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ *definujeme jako měřitelné zobrazení prostoru* (Ω, A, P) *do* $(\mathbf{R}_2, B_2)$*, kde* $\mathbf{R}_2$ *je 2-rozměrný euklidovský prostor a* B_2 *systém jeho borelovských podmnožin.*

Distribuční funkce je funkce F *s definičním oborem* $\mathbf{R}^*$ *taková, že* F *je neklesající,* $F(-\infty) = 0$*, a* $F(+\infty) = 1$.

Sdružená distribuční funkce F_{X_1,X_2} *veličin* X_1, X_2 *je dána vztahem* $F_{X_1,X_2} = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2)$ *. Jí odpovídající míra* Q *na* $(\mathbf{R}_2, B_2)$ *se nazývá sdružené rozdělení veličin* X_1, X_2.

Sdružená hustota f_{X_1,X_2} *je nezáporná funkce, která pro každou dvojici* X_1, X_2 *splňuje*

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(u_1, u_2) du_1 du_2,$$

a tedy existuje-li hustota, má F_{X_1,X_2} *skoro všude derivaci a platí*

$$\frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 x_2} = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \ s.v.$$

Definice 2 *Vyjádříme-li náhodný jev* $(X_1 < x_1)$ *pro libovolné* x_1 *jako limitu monotónní posloupnosti náhodných jevů, dostaneme marginální distribuční funkci náhodné veličiny* X_1 *danou vztahem*

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_1 \to \infty} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2).$$

Podobně pro marginální distribuční funkci náhodné veličiny X_2 platí

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_2 \to \infty} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2).$$

Definice 3 *Marginální hustota náhodné veličiny* X_1 *je dána vzorcem*

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, u)du.$$

Podobně pro marginální distribuční funkci náhodné veličiny X_2 platí

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(u, x_2)du.$$

Existuje-li sdružená hustota, existují i jednoznačně určené marginální hustoty. Obráceně to však neplatí, různá sdružená rozdělení mohou mít stejná marginální rozdělení.

Problém, jak definovat všechna sdružená rozdělení, pokud známe marginální rozdělení, řeší kopulová funkce.

Kapitola 3

Kopuly

Definice 4 *2-dimenzionální kopula je funkce* $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ *splňující následující vlastnosti:*

1. *pro každé* $u, v \in [0,1]$ *platí* $C(u,0) = 0 = C(0,v)$ *a* $C(u,1) = u$ *a* $C(1,v) = v$
2. *pro každé dva body* (u_1, u_2) *a* (v_1, v_2) *z* $[0,1]^2$ *splňující podmínky* $u_1 \leq v_1$ *a* $u_2 \leq v_2$ *platí* $C(v_1,v_2) - C(v_1,u_2) - C(u_1,v_2) + C(u_1,u_2) \geq 0$

[3], str.8

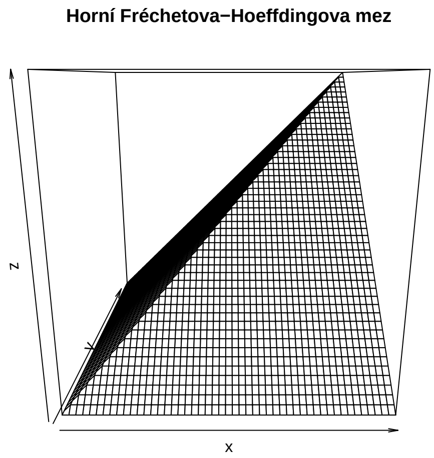
3.1 Vlastnosti kopul

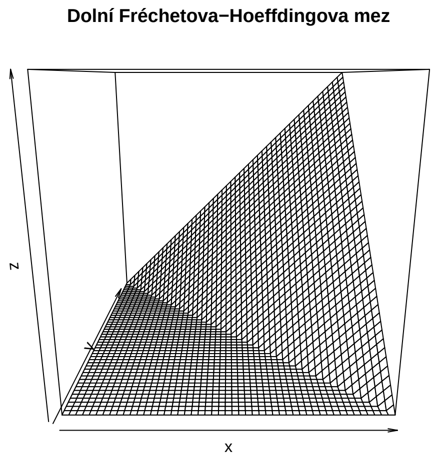
Uveďme některé základní vlastnosti kopulových funkcí. Nechť C je 2-dimenzionální kopula a Df je její definiční obor.

- Označme $M(u,v) = min(u,v)$ a $W(u,v) = max(u+v-1, 0)$. Potom pro každou kopulu C a každý bod $(u,v) \in [0,1]^2$ platí

  $$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v).$$

  Funkce M a W jsou kopuly, přitom M je *horní* a W *dolní Fréchetova-Hoeffdingova mez* .
  Graf kopuly je souvislá plocha $z = C(u,v)$ ležící uvnitř jednotkové krychle mezi grafy Fréchetovy-Hoeffdingovy horní a dolní meze, tj. mezi plochami $z = M(u,v)$ a $z = W(u,v)$.





- Pro všechny $u_1, u_2, v_1, v_2 \in Df(C)$ platí

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

  Tedy C je stejnoměrně spojitá na svém definičním oboru.

- Nechť a je číslo náležící do $[0, 1]$. Potom
  vodorovný řez kopulou v bodě a je funkce z $[0, 1]$ do $[0, 1]$ daná předpisem $t \mapsto C(t, a)$,
  svislý řez kopulou v bodě a je funkce z $[0, 1]$ do $[0, 1]$ daná předpisem $t \mapsto C(a, t)$,
  diagonální řez kopulou v bodě a je funkce δ_C z $[0, 1]$ do $[0, 1]$ definovaná jako $\delta_C(t) = C(t, t)$.
  Vodorovný, svislý a diagonální řez kopulou C jsou neklesající a stejnoměrně spojité funkce na [0,1].

- Pro každé $v \in [0, 1]$ existuje parciální derivace $\frac{\partial C}{\partial u}$ pro skoro všechna u a pro tato v a u platí

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1.$$

  Podobně pro každé $u \in [0, 1]$ existuje parciální derivace $\frac{\partial C}{\partial v}$ pro skoro všechna v a pro tato u a v platí

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1.$$

Navíc funkce $u \mapsto \frac{\partial C}{\partial v}$ a $v \mapsto \frac{\partial C}{\partial u}$ jsou definovány a jsou neklesající skoro všude na $[0,1]$.

3.2 Sklarova věta

Tato věta je v teorii kopul považována za základní a je často citována v mnoha publikacích.

Věta 5 *Nechť H je sdružená distribuční funkce s marginálními distribučními funkcemi F a G. Potom existuje kopula C tak, že pro všechna $x, y \in \mathbf{R}^*$ je*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)).$$

Pokud F a G jsou spojité, pak C je určena jednoznačně. Pokud C je kopula a F, G jsou jednorozměrné distribuční funkce, pak $H(x,y) = C(F(x), G(y))$ je sdružená distribuční funkce s marginály F a G.

[3], str.15

Ze Sklarovy věty je vidět, že spojité 2-rozměrné rozdělení lze vyjádřit pomocí 1-rozměrných marginálů a jejich vzájemné závislosti, která může být reprezentována kopulou.

Definice 6 *Nechť F je nějaká distribuční funkce. Pak funkce F^{-1} daná předpisem $F^{-1}(u) = inf\{x : F(x) \geq u\} = sup\{x : F(x) \leq u\}, u \in [0,1]$ se nazývá kvantilová funkce odpovídající distribuční funkci F.*

Platí $F(F^{-1}(u)) = u$. Hodnoty $F^{-1}(u)$ se nazývají kvantily. Je-li F rostoucí, pak F^{-1} je obyčejná inverzní funkce k F.
Nyní s použitím Sklarovy věty můžeme napsat následující důsledek.

Věta 7 *Nechť H je sdružená distribuční funkce s marginály F a G, které jsou spojité. Nechť F^{-1} a G^{-1} jsou kvantilové funkce F a G a nechť pro všechna $x, y \in \mathbf{R}^*$ je $H(x,y) = C(F(x), G(y))$. Potom pro všechny $(u,v) \in Df(C)$ platí*

$$C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

[3], str.19

Kapitola 4

Kopula a náhodné veličiny

4.1 Nezávislé náhodné veličiny

Náhodnou veličinu $X(\omega)$ definujeme jako měřitelnou funkci z (Ω, A,P) do $(\mathbf{R}, B)$, kde $\mathbf{R}$ je reálná přímka a B systém jejích borelovských množin.

Definice 8 *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi F a G a sdruženou distribuční funkcí H. Příslušnou kopulu splňující Sklarovu větu nazveme kopulou náhodných veličin X a Y, značíme C_{XY}.*

Věta 9 *Definujme kopulu $\Pi(u, v) = uv$. Potom platí, že X a Y jsou nezávislé, právě když $C_{XY} = \Pi$.*

[3], str. 21

4.2 Transformace

Mnoho důležitých poznatků o kopulách čerpá z faktu, že při transformaci pomocí ryze rostoucí funkce se kopula buď nemění, nebo se mění předvídatelným způsobem. Tedy jinak řečeno pokud je distribuční funkce náhodné veličiny X spojitá a α je rostoucí funkce, jejíž definiční obor zahrnuje $Df(X)$, pak distribuční funkce náhodné veličiny $\alpha(X)$ je také spojitá.

Věta 10 *Nechť X a Y jsou spojité náhodné veličiny s kopulou C_{XY}. Pokud α a β jsou rostoucí funkce, pak*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}.$$

[3], str.22

Tedy C_{XY} se nemění při transformaci náhodných veličin X a Y rostoucími funkcemi α a β.

Pokud je aspoň jedna z funkcí α, β klesající, potom kopula náhodných veličin $\alpha(X)$, $\beta(Y)$ je jednoduchou transformací kopuly C_{XY}:

Věta 11 *Nechť X, Y jsou spojité náhodné veličiny s kopulou C_{XY} a α, β jsou ryze monotónní funkce na $Df(X)$ a $Df(Y)$. Potom platí*

1. *jestliže je α rostoucí a β klesající, tak* $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$
2. *jestliže je α klesající a β rostoucí, tak* $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)$
3. *jestliže je α i β klesající, tak* $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)$

[3], str.22

Jak již bylo zmíněno, pro každé $v \in [0, 1]$ existuje parciální derivace $\frac{\partial C}{\partial u}$ pro skoro všechna u a pro taková u je $0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1$. Tuto vlastnost nyní použijeme.

Definice 12 *Nechť $C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v)$, kde $A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t) dt ds$ a $S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v)$.*

- *Pokud $C = A_C$ na $[0, 1]^2$ (tedy chápeme C jako sdruženou distribuční funkci, která má sdruženou hustotu danou vzorcem $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$), tak říkáme, že C je tvořena absolutně spojitou částí.*
- *Pokud $C = S_C$ na $[0, 1]^2$ (tedy $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = 0$ skoro všude na $[0, 1]^2$), tak říkáme, že C je tvořena singulární částí.*

Tedy C se skládá z absolutně spojité a singulární části. Ani jedna část však samostatně netvoří kopulu.

4.3 Fréchetovy-Hoeffdingovy meze

V důsledku Sklarovy věty pro náhodné veličiny můžeme psát Fréchetovy-Hoeffdingovy meze jako

$$max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x, y) \leq min(F(x), G(y))$$

pro všechna $x, y \in \mathbf{R}^*$, kde H je sdružená distribuční funkce a F, G její marginály.

4.4 Kopuly přežití

V mnoha aplikacích reprezentují náhodné veličiny dobu životnosti jedinců nebo objektů v nějaké populaci.

Definice 13 *Pravděpodobnost, že se jedinec dožije času x, je určena funkcí přežití $\overline{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$, kde $F(x)$ je distribuční funkce X. Pro dvojici nezávislých náhodných veličin X, Y se sdruženou distribuční funkcí H je funkce přežití dána jako $\overline{H}(x, y) = P[X > x, Y > y]$.*

Marginály jsou $\overline{H}(x, -\infty) = \overline{F}(x)$ a $\overline{H}(-\infty, y) = \overline{G}(y)$.

Nyní se můžeme ptát, zda existuje nějaký vztah mezi jednorozměrnými a sdruženými funkcemi přežití podobně, jako byl zaveden ve Sklarově větě pro distribuční funkce.

Předpokládejme, že C je kopula náhodných veličin X, Y. Potom máme $\overline{H}(x, y) = P[X > x, Y > y] = (1 - F(x))(1 - G(y)) = 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) = \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) = \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y))$,
tedy pokud položíme $\widehat{C} : [0, 1]^2 \to [0, 1]$, $\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$, tak dostáváme

$$\overline{H}(x, y) = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)).$$

$\widehat{C}$ je kopula, nazýváme ji *kopula přežití náhodných veličin X a Y*. $\widehat{C}$ má v tomto případě úplně stejnou funkci, jakou měla kopula C v případě distribučních funkcí.

4.5 Uspořádání

Jak už bylo řečeno, nerovnost $W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v)$ platí pro každou kopulu C, proto se nabízí zavedení následujícího uspořádání kopul.

Definice 14 *Pokud C_1 a C_2 jsou kopuly, tak řekneme, že C_1 je menší než C_2 (C_2 je větší než C_1), pokud $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)$ pro všechna $u, v \in [0,1]$. Značíme $C_1 \prec C_2$.*

Můžeme tedy říct, že Fréchetova-Hoeffdingova horní mez je vždy větší a Fréchetova-Hoeffdingova dolní mez je vždy menší než jakákoliv kopula. Toto částečné uspořádání se naývá *konkordanční uspořádání*. Částečné proto, že ne vždy lze kopuly porovnávat. Naštěstí existují rodiny kopul, v rámci kterých lze kopuly zcela porovnat. Taková rodina kopul $\{C_\theta\}$ s jedním parametrem se jmenuje *pozitivně uspořádaná*, pokud $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$ vždy, když $\theta_1 \leq \theta_2$ a *negativně uspořádaná*, pokud $C_{\theta_1} \succ C_{\theta_2}$ vždy, když $\theta_1 \leq \theta_2$.

4.6 Generování jevů

Jednou z prvních aplikací kopul je generování jednotlivých pozorování (x,y) z náhodných vektorů (X,Y) s daným sdruženým rozdělením. Tato pozorování potom mohou být použita ke studiu matematických modelů reálných systémů nebo ve statistických studiích.
Algoritmus získání jevu x z náhodné veličiny X s distribuční funkcí F

1. Vygeneruj veličinu u, která má rovnoměrné rozdělení na $(0,1)$.

2. Dosaď $x := F^{-1}(u)$, kde F^{-1} je kvantilová funkce F.

Získání jevu (x,y) z náhodného vektoru (X,Y) se sdruženou distribuční funkcí H pomocí kopuly
S použitím Sklarovy věty víme, že potřebujeme získat pozorování (u,v) náhodných veličin (U,V) s rovnoměrným rozdělením na $(0,1)$ tak, aby jejich sdružená distribuční funkce byla C_{XY}. Potom už stačí použít předchozí algoritmus.

Metoda podmíněného rozdělení:

Označme

$$c_u(v) := P[V \leq v | U = u] = \lim_{\Delta \to 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

Kroky:

1. Generuj dvě nezávislé veličiny u, t s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$
2. Dosaď $v := c_u^{-1}(t)$, kde c_u^{-1} značí kvantilovou funkci c_u
3. Požadovaná dvojice je (u, v)

Kapitola 5

Míry závislosti

Kopuly nabízí přirozený způsob, jak zkoumat závislost dvou náhodných veličin. Velkou výhodou je i to, že při ryze monotónní transformaci se vlastnosti kopuly nemění. Jinou mírou závislosti je lineární korelace, která se pro svou jednoduchost v praxi používá nejčasteji. Ta ale vede ke správným výsledkům jen v případě lineární závislosti.

5.1 Lineární korelace

Definice 15 *Buď $(X,Y)^T$ náhodný vektor s konečnými nenulovými rozptyly. Potom lineání korelace pro vektor $(X,Y)^T$ je dána vztahem*

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{varX}\sqrt{varY}},$$

kde $cov(X,Y) = EXY - EXEY$ je kovariance náhodného vektoru $(X,Y)^T$ a $varX, varY$ jsou rozptyly X a Y.

Lineární korelace je míra lineární závislosti. V případě, že náhodné veličiny jsou lineárně závislé (např. $\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$ s.j. pro $a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R}$), tak $|\rho(X,Y)| = 1$.

Vlastnosti:

- $-1 < \rho(X,Y) < 1$
- $\rho(\alpha\mathbf{X} + \beta, \gamma\mathbf{Y} + \delta) = sgn(\alpha\gamma)\rho(\mathbf{X,Y})$ pro $\alpha, \gamma \in \mathbf{R} - \{0\}, \beta, \delta \in \mathbf{R}$. Jinak řečeno, lineární korelace se nemění při ryze rostoucí lineární transformaci.

- Nechť A, B jsou $m \times n$ matice, $a, b \in \mathbf{R}^m$ a nechť $\mathbf{X{,}Y}$ jsou náhodné vektory ($\in \mathbf{R}^n$). Pak $cov(A\mathbf{X} + a, B\mathbf{Y} + b) = Acov(\mathbf{X{,}Y})B^T$. Tedy rozptyl lineární kombinace dvou vektorů je určen kovariancí všech možných dvojic náhodných veličin. Tato vlastnost je klíčová v teorii portfolia.

5.2 Perfektní závislost

Uvažujme opět Fréchet-Hoeffdingovu nerovnost pro kopuly: $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$. Víme, že W a M jsou kopuly a že jsou to distribuční funkce náhodných vektorů $(U, 1 - U)^T$ a $(U, U)^T$, kde $U \sim R(0, 1)$. V takovém případě říkáme, že W charakterizuje *perfektní zápornou závislost* a M *perfektní kladnou závislost.*

Věta 16 *Nechť distribuční funkce náhodného vektoru $(X, Y)^T$ je jedna z kopulí W nebo M. Potom existují dvě monotónní funkce $\alpha, \beta : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ a náhodná veličina Z tak, že*

$$(X, Y) = (\alpha(Z), \beta(Z)),$$

kde α je rostoucí a β klesající pro kopulu W a α i β jsou rostoucí v případě kopuly M. Opačná implikace rovněž platí.

[4], str. 10

Definice 17 *Jestliže distribuční funkce náhodného vektoru $(X, Y)^T$ je M, tak řekneme, že X a Y jsou komonotónní,*
jestliže distribuční funkce náhodného vektoru $(X, Y)^T$ je W, tak řekneme, že X a Y jsou kontramonotónní.

5.3 Konkordance

Definice 18 *Mějme dvě pozorování (x_1, y_1) a (x_2, y_2) z náhodného vektoru $(X, Y)^T$. Potom (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou konkordantní, jestliže $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ a diskordantní, jestliže $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.*

Jinými slovy, (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou konkordantní, pokud je $x_1 < x_2$ a $y_1 < y_2$, a diskordantní, pokud $x_1 < x_2$ a $y_1 > y_2$ nebo $x_1 > x_2$ a $y_1 < y_2$.

Dříve, než ukážeme, jakou roli hrají kopuly v konkordanci, zaveďme "konkordanční funkci" Q.

Definice 19 *Konkordanční funkce Q je dána rozdílem pravděpodobnosti konkordance a pravděpodobnosti diskordance náhodných vektorů (X_1, Y_1) a (X_2, Y_2), které mají různé sdružené distribuční funkce H_1 a H_2, ale stejné marginály F a G, tj. $Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$.*

Věta 20 *Nechť $(X_1, Y_1)^T$ a $(X_2, Y_2)^T$ jsou nezávislé náhodné vektory, H_1 je sdružená distribuční funkce $(X_1, Y_1)^T$ a H_2 je sdružená distribuční funkce $(X_2, Y_2)^T$. Nechť X_1, X_2 mají stejnou marginální distribuční funkci F a Y_1,Y_2 funkci G. Nechť $(X_1, Y_1)^T$ má kopulovou funkci C_1 a $(X_2, Y_2)^T$ kopulovou funkci C_2 tak, že $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ a $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Nechť Q je konkordanční funkce $(X_1, Y_1)^T$ a $(X_2, Y_2)^T$. Potom*

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

[4], str.11

Z Věty 20 plynou následující vlastnosti konkordanční funkce:

1. Q je symetrická v argumentu: $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$
2. Q je neklesající v každé proměnné: jestliže $C' \prec C''$, tak $Q(C', C_2) \leq Q(C'', C_2)$
3. kopuly jako argumenty funkce Q mohou být nahrazeny odpovídajícími kopulami přežití: $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$

5.4 Kendalovo τ a Spearmanovo ρ

Tato kapitola se zabývá dvěma důležitými mírami závislosti vycházejícími z konkordance známými jako Kendalovo τ a Spearmanovo ρ. Představují pravděpodobně nejlepší alternativu k lineární korelaci.

Definice 21 *Kendalovo τ náhodného vektoru $(X, Y)^T$ definujeme jako $\tau(X, Y) = P[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0] - P[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0]$, kde $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ a $(X, Y)^T$ jsou nezávislé.*

Věta 22 *Buď $(X,Y)^T$ vektor spojitých náhodných veličin s kopulou C. Potom Kendalovo τ pro vektor $(X,Y)^T$ splňuje vztah*

$$\tau(X,Y) = Q(C,C) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u,v)dC(u,v) - 1.$$

[4], str.13

Jinými slovy, integrál z Věty 22 je střední hodnota náhodné veličiny $C(U,V)$,kde $U,V \sim R(0,1)$ se sdruženou distribuční funkcí C, tj.
$\tau(X,Y) = 4E(C(U,V)) - 1$.

Definice 23 *Spearmanovo ρ náhodného vektrou $(X,Y)^T$ je definováno jako $\rho_S(X,Y) = 3(P[(X-\tilde{X})(Y-Y^{'}) > 0] - [(X-\tilde{X})(Y-Y^{'}) < 0])$, kde $(X,Y)^T, (\tilde{X},\tilde{Y})^T, (X^{'},Y^{'})^T$ jsou nezávislé.*

Věta 24 *Buď $(X,Y)^T$ vektor spojitých náhodných veličin s kopulou C. Potom Spearmanovo ρ pro vektor $(X,Y)^T$ splňuje vztah*

$$\rho_S(X,Y) = 3Q(C,\Pi) = 12 \iint_{[0,1]^2} uv\, dC(u,v) - 3 = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u,v)dudv - 3.$$

[4], str.13

Tedy pokud $X \sim F, Y \sim G$ a $U = F(X), V = G(Y)$,tak dostáváme $\rho_S(X,Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} uv\, dC(u,v) - 3 = 12E(UV) - 3 = \frac{E(UV)-\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = \frac{cov(U,V)}{\sqrt{varU}\sqrt{varV}} =$

$\rho(F(X),G(Y))$.

Definice 25 *Číselnou míru κ závislosti dvou spojitých náhodných veličin, jejichž kopula je C, nazveme mírou konkordance, jestliže splňuje následující vlastnosti:*

1. *κ je definována pro každou dvojici náhodných veličin X,Y*
2. *$-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1, \kappa_{X,X} = 1, \kappa_{X,-X} = -1$*
3. *$\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$*
4. *jestliže X a Y jsou nezávislé, tak $\kappa_{X,Y} = \kappa_\Pi = 0$*
5. *$\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$*
6. *jestliže pro kopuly C_1 a C_2 platí, že $C_1 \prec C_2$, tak $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$*

7. *jestliže* $\{(X_n, Y_n)\}$ *je posloupnost spojitých náhodných veličin s příslušnými kopulami* C_n *a* C_n *konverguje bodově k* C*, tak* $\lim_{n\to\infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$

Věta 26 *Nechť* X *a* Y *jsou spojité náhodné veličiny s kopulou* C*. Pak Kendalovo* τ *a Spearmanovo* ρ *splňují vlastnosti uvedené v definici 25 a jsou tedy míry konkordance.*

[3], str.136

Z definice 25 plynou další vlastnosti κ:

- jestliže Y je s.j. rostoucí funkcí X, tak $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$
- jestliže Y je s.j. klesající funkcí X, tak $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$
- jestliže α (resp. β) je s.j. striktně monotónní funkce na definičním oboru X (resp. Y), tak $\kappa_{\alpha(X)\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$

Věta 27 *Nechť* X *a* Y *jsou spojité náhodné veličiny s kopulou* C*, nechť* κ *značí Kendalovo* τ *nebo Spearmanovo* ρ*. Pak platí*

1. $\kappa(X, Y) = 1$*, právě když* $C = M$
2. $\kappa(X, Y) = -1$*, právě když* $C = W$

[4], str.15

Z definic Kendalova τ a Spearmanova ρ vyplývá, že obě tyto míry závislosti jsou rostoucí funkce hodnot dané kopuly, a tedy jsou konkordančním uspořádáním.

5.5 Závislost na chvostech

Při vyšetřování závislosti dat s extrémními hodnotami je důležitý pojem závislosti na chvostech. Závislost na chvostech dvou náhodných vektorů X a Y s marginály F a G měří pravděpodobnost, že Y bude realizována v oblasti chvostu G za podmínky, že X je realizována v oblasti chvostu F. Jde tedy o další míru závislosti, která zkoumá v pravém horním nebo levém dolním kvadrantu chvosty dvourozměrných rozdělení. Ukazuje se, že závislost na chvostech má vlastnosti kopuly, a tedy se nemění při ryze rostoucí transformaci.

Definice 28 *Nechť* $(X,Y)^T$ *je vektor spojitých náhodných veličin s marginály* F *a* G*. Koeficient horní míry závislosti definujeme jako*

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1} P(Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u))$$

a koeficient dolní míry závislosti jako

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0} P(Y < G^{-1}(u) | X < F^{-1}(u)).$$

Pokud λ_U resp. $\lambda_L \in (0,1]$, tak říkáme, že X a Y jsou *asymptoticky závislé v horním*, resp. *dolním chvostu*, pokud λ_U resp. $\lambda_L = 0$, tak X a Y jsou *asymptoticky nezávislé v horním*, resp. *dolním chvostu*.

Tedy λ_U existuje, pokud pravděpodobnost, že velká vychýlení v kladném směru nastanou zároveň pro X i Y, je kladná.
Výraz $P(Y > G^{-1}(u)|X > F^{-1}(u))$ lze dále upravit:

$$P(Y > G^{-1}(u)|X > F^{-1}(u)) = \frac{P(Y > G^{-1}(u), X > F^{-1}(u))}{P(X > F^{-1}(u))} = \frac{P(Y > G^{-1}(u))P(X > F^{-1}(u))}{1 - P(X \leq F^{-1}(u))} =$$

$$\frac{(1 - P(Y \leq G^{-1}(u))(1 - P(X \leq F^{-1}(u))}{1 - P(X \leq F^{-1}(u))} = \frac{1 - P(Y \leq G^{-1}(u)) - P(X \leq F^{-1}(u)) + P(Y \leq G^{-1}(u), X \leq F^{-1}(u))}{1 - P(X \leq F^{-1}(u))}$$

Nyní můžeme napsat ekvivalentní definici, ze které je již vidět, že závislost na chvostech má opravdu vlastnosti kopuly.

Definice 29 *Jestliže* $\lim_{u \to 1} \frac{(1 - 2u + C(u,u))}{1-u} = \lambda_U$ *existuje pro nějakou kopulu* C*, pak* C *má horní závislost na chvostech v případě, že* $\lambda_U \in (0,1]$*, a horní nezávislost na chvostech, pokud* $\lambda_U = 0$*.*
Podobně pro dolní závislost na chvostech $(\lim_{u \to 0} \frac{C(u,u)}{u} = \lambda_L)$*.*

Kapitola 6

Rodiny kopul

6.1 Marshall-Olkinovy kopuly

Jednorozměrné exponenciální rozdělení hraje ústřední roli v Poissonově procesu, neboť je to rozdělení doby čekání na první událost. V této kapitole sestrojíme dvourozměrné exponenciální rozdělení, které má podobnou funkci v dvourozměrném Poissonově procesu.

Představme si nyní například nějakou místnost, ve které se nachází dva stroje. Každý z nich se může porouchat. Označme X_1 a X_2 doby jejich bezporuchového chodu. Výskyty poruch tvoří tři nezávislé Poissonovy procesy s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} \geq 0$, kde index značí, který ze strojů se porouchal. Tedy časy výskytů poruch Z_1, Z_2, Z_{12} jsou nezávislé náhodné veličiny mající exponenciální rozdělení s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$. Počítejme funkci přežití:
$\overline{H}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) =$
$P(Z_1 > x_1)P(Z_2 > x_2)P(Z_{12} > max(x_1, x_2))$
Jednorozměrné funkce přežití náhodných veličin X_1 a X_2 jsou
$\overline{F_1}(x_1) = 1 - F_1(x_1) = 1 - (1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x_1}) = e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x_1}$,
$\overline{F_2}(x_2) = 1 - F_2(x_2) = e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})x_2}$.
Pokud vyjádříme $max(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - min(x_1, x_2)$, dostaneme

$$\overline{H}(x_1, x_2) = e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} e^{-\lambda_{12} x_1 - \lambda_{12} x_2 + \lambda_{12} min(x_1, x_2)} =$$

$$\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x_1} e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})x_2} e^{\lambda_{12} min(x_1,x_2)} = \overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2) min(e^{\lambda_{12}x_1}, e^{\lambda_{12}x_2})$$

Označíme-li $\alpha_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_{12}}$ a $\alpha_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2+\lambda_{12}}$, máme $e^{\lambda_{12}x_1} = \overline{F_1}(x_1)^{-\alpha_1}$ a $e^{\lambda_{12}x_2} = \overline{F_2}(x_2)^{-\alpha_2}$, tedy

$$\overline{H}(x_1, x_2) = \overline{F_1}(x_1)\,\overline{F_2}(x_2)\,min(\overline{F_1}(x_1)^{-\alpha_1},\ \overline{F_2}(x_2)^{-\alpha_2}).$$

Pro kopulu přežití náhodného vektoru $(X_1, X_2)^T$ potom platí

$$\widehat{C}(u_1, u_2) = u_1\,u_2\,min(u_1^{-\alpha_1},\ u_2^{-\alpha_2}) = min(u_1^{1-\alpha_1}u_2,\ u_1u_2^{1-\alpha_2}).$$

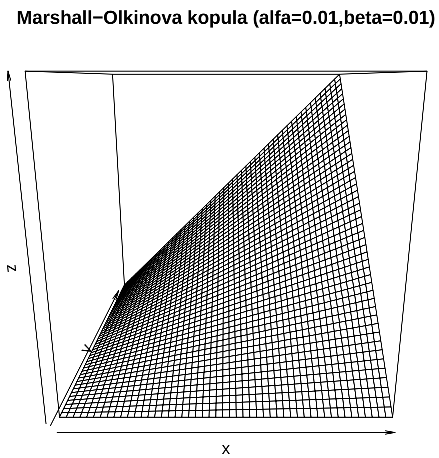
Tato konstrukce nás dovádí k Marshall-Olkinově rodině kopul dané předpisem

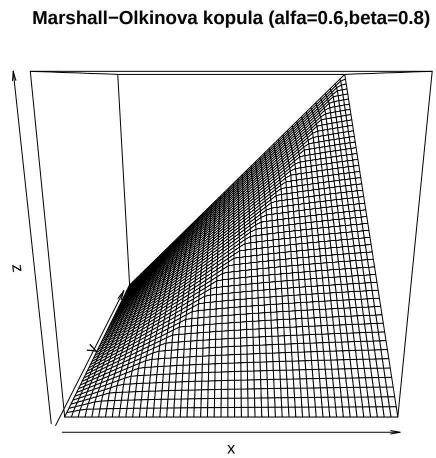
$$C_{\alpha_1,\alpha_2}(u_1, u_2) = min(u_1^{1-\alpha_1}u_2,\ u_1u_2^{1-\alpha_2}) = \begin{cases} u_1^{1-\alpha_1}u_2, & u_1^{\alpha_1} \geq u_2^{\alpha_2} \\ u_1u_2^{1-\alpha_2}, & u_1^{\alpha_1} \leq u_2^{\alpha_2} \end{cases}$$

Vypočteme ještě sdruženou hustotu:

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1\,\partial u_2}C_{\alpha_1,\alpha_2}(u_1, u_2) = \begin{cases} u_1^{-\alpha_1}, & u_1^{\alpha_1} > u_2^{\alpha_2} \\ u_2^{-\alpha_2}, & u_1^{\alpha_1} < u_2^{\alpha_2} \end{cases}$$

Je vidět, že Marshall-Olkinovy kopuly mají absolutně spojitou i singulární část, která je tvořena křivkou $u_1^{\alpha_1} = u_2^{\alpha_2}$.





6.2 Eliptické kopuly

Do třídy eliptických rozdělení patří velká škála mnohorozměrných rozdělení, která mají spoustu společných vlastností s normálním rozdělením a navíc umožňují modelovat extrémy a jiné druhy závislostí, které nemají normalní rozdělení. Eliptické kopuly jsou jednoduše kopuly eliptických rozdělení.

Pro úplnost uveďme definici eliptického rozdělení.

Definice 30 *Jestliže X je n-dimenzionální náhodný vektor a pro nějaké $\mu \in \boldsymbol{R}^n$ a nějakou Σ pozitivně semidefinitní symetrickou matici $n \times n$ je charakteristická funkce $\varphi_{X-\mu}(t)$ vektoru $X - \mu$ funkcí kvadratické formy $t^T \Sigma t$, $\varphi_{X-\mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t)$, tak řekneme, že X má eliptické rozdělení s parametry μ, Σ a ϕ, zapisujeme $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.*

[4], str.22

Příklady dvourozměrných eliptických kopul:

Gaussovy kopuly

$$C_R^{Ga}(u,v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} exp\Big\{ -\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1-R_{12}^2)} \Big\} ds\, dt,$$

kde ϕ je distribuční funkce normálního rozdělení a R_{12} je korelační koeficient příslušného dvourozměrného normálního rozdělení.

t-kopuly

$$C_{\nu,R}^{t}(u,v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} \Big\{ 1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1-R_{12}^2)} \Big\}^{\frac{-(\nu+2)}{2}} ds\, dt,$$

kde R_{12} je korelační koeficient příslušný dvourozměrnému t_ν-rozdělení, $\nu > 2$.

6.3 Archimédovské kopuly

V této kapitole popíšeme důležitou třídu kopul nabízející velké množství druhů struktur závislostí známou jako Archimédovské kopuly. Jejich předností je, že je lze jednoduše zkonstruovat a na rozdíl od eliptických kopul mají vyjádření v uzavřeném tvaru. Navíc v mnoha finančních aplikacích se ukazuje, že existuje větší závislost mezi velkými ztrátami než mezi velkými zisky. Takové výkyvy však nelze modelovat eliptickými kopulami.

Definice 31 *Nechť $\varphi^{[-1]}(t) : [0,1] \to [0,\infty]$ je spojitá ryze klesající funkce, pro kterou je $\varphi(1) = 0$. Pak pseudo-inverze funkce φ je funkce $\varphi^{[-1]} : [0,\infty] \to [0,1]$ daná předpisem*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Tedy $\varphi^{[-1]}$ je spojitá, ryze klesající na $[0, \varphi(0)]$ a nerostoucí na $[0,\infty]$. Dále platí

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u, \;\; u \in [0,1]$$

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Nakonec ještě poznamenejme, že pokud $\varphi(0) = \infty$, tak $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Věta 32 *Nechť $\varphi^{[-1]}(t) : [0,1] \to [0,\infty]$ je spojitá ryze klesající funkce taková, že $\varphi(1) = 0$ a nechť $\varphi^{[-1]}$ je pseudo-inverze k φ. Nechť $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ je funkce daná předpisem $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$. Potom C je kopula tehdy a jen tehdy, když φ je konvexní.*

[4], str.31

Kopuly z věty 32 se nazývají Archimédovské kopuly, funkce φ je generátorem kopuly. Je-li $\varphi(0) = \infty$, tak říkáme, že φ je striktní generátor a v tomto případě je $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ a $C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ se nazývá striktní Archimédovská kopula.

Vlastnosti
Pro Archimédovské kopuly s generátorem φ platí:

- C je symetrická: $C(u,v) = C(v,u)$
- Je-li $K > 0$ konstanta, pak $K\varphi$ je také generátor C

Vraťme se ještě ke Kendallovu τ. Ve Větě 22 jsme viděli, že τ lze vypočítat pomocí dvourozměrného integrálu, což bývá většinou obtížné. Pro rodinu Archimédovských kopulí však lze τ vyjádřit jednorozměrným integrálem generátoru a jeho derivace:

Věta 33 *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny s Archimédovskou kopulou C a generátorem φ. Pak Kendallovo τ je dáno jako*

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt$$

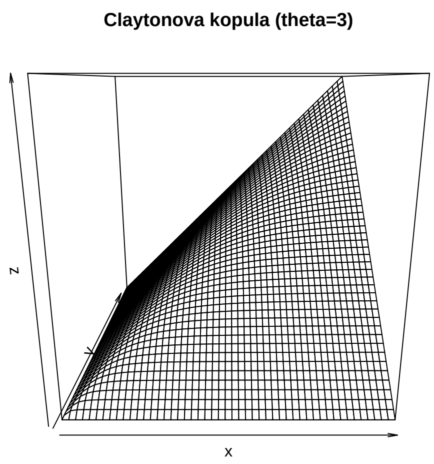
[4], str.34

Příklady dvourozměrných Archimédovských kopul

Claytonova rodina

$$C_\theta(u,v) = max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0)$$

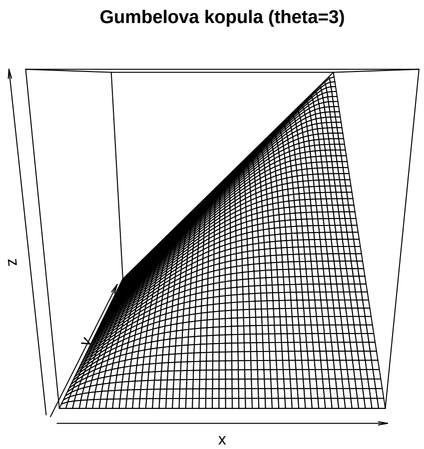
s generátorem $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1), \theta \in [-1, \infty)\backslash\{0\}$. Tyto kopuly jsou striktní, pokud $\theta \geq 0$.



Gumbelova rodina

$$C_\theta(u,v) = exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\}$$

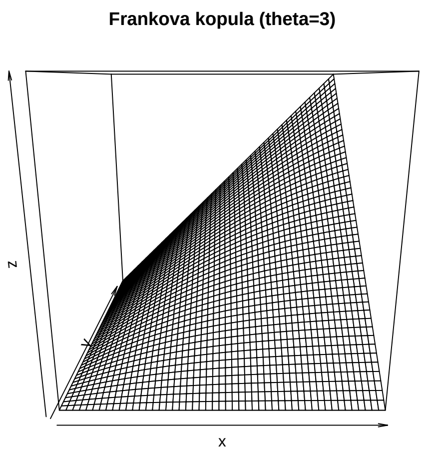
s generátorem $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta, \theta \in [1,\infty)$. Kopuly jsou striktní.



Frankova rodina

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)})$$

s generátorem $\varphi_\theta(t) = -\ln\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}, \theta \in (-\infty,\infty)\setminus\{0\}$. Kopuly jsou opět striktní.



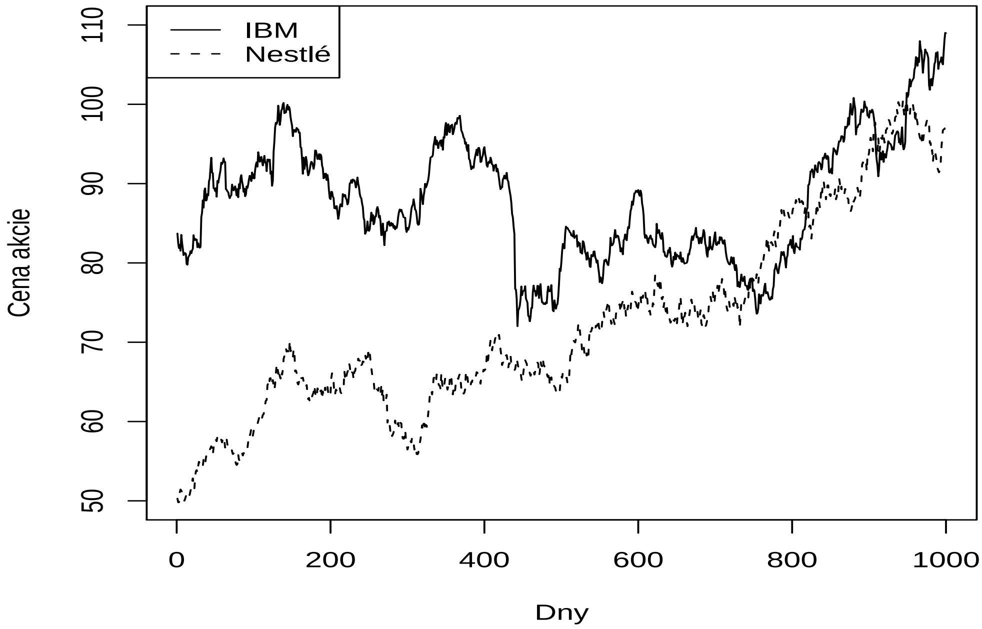
Kapitola 7

Aplikace

Finanční management musí počítat s různými druhy rizik, které dohromady tvoří takzvané sdružené riziko. Základní dělení sdruženého rizika je na kreditní, tržní a operační. Kreditní riziko vyjadřuje pravděpodobnost defaultu při půjčování, tržní zahrnuje riziko při obchodování s aktivy a operační uvažuje selhaní vnitřních procesů (lidí nebo systémů) a nepředvídatelné události.

Každé z jednotlivých rizik má své marginální rozdělení, které je nutno vhodně aproximovat, ale tyto odhady nestačí k určení sdruženého rizika. K modelování sdruženého rizika se používají různé metoty, jednou z možností je použití kopulové funkce. Ta umožňuje studovat a modelovat sdružené riziko nezávisle na marginálních rozděleních. V této kapitole se budeme zabývat odhady pomocí Archimédovských kopul.

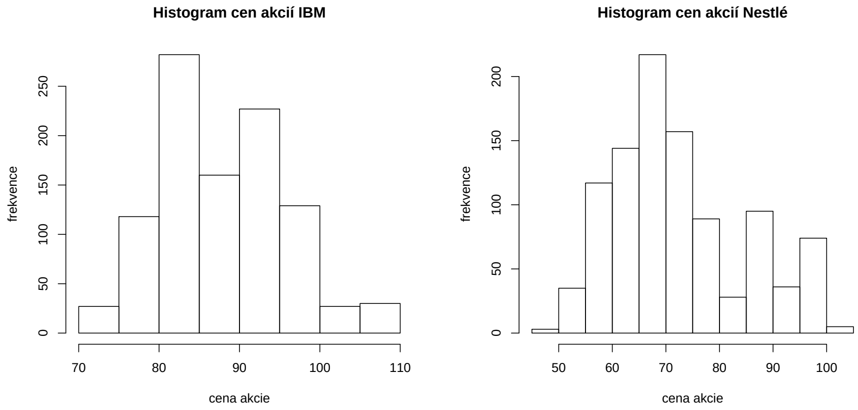
Použijeme dvě série historických dat. Jsou to denní uzavírací ceny akcií společností IBM a Nestlé získané z adresy `http://finance.yahoo.com`. Každá ze sérií má 1000 položek, tedy odpovídá cenám přibližně za poslední 2 roky a 9 měsíců, tj. od října 2004 do června 2007. Následující obrázek zachycuje vývoj ceny akcie v závislosti na čase.



7.1 Odhad marginálních rozdělení

Nejprve musíme odhadnout, jaká jsou marginální rozdělení dat. Vypočtěme základní charakteristiky a podívejme se na histogramy:

	IBM	Nestlé
průměr	87.954	72.387
směrodatná odchylka	7.759	12.357
maximum	109.030	100.450
minimum	72.010	49.800
kvantil 95%	101.185	96.850



Obrázky napovídají, že data by mohla mít přibližně normální rozdělení. Tuto domněnku ověříme pomocí *Kolmogorovova-Smirnovova testu.* Nechť F je distribuční funkce normálního rozdělení, F_n je empirická distribuční funkce definovaná jako

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x), \quad \text{kde } \xi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } X_i < x \\ 0, & \text{je-li } X_i \geq x \end{cases}$$

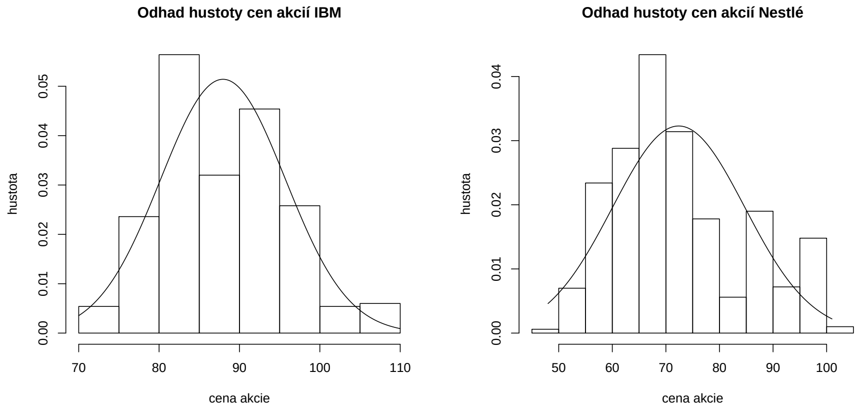
Testujme tedy nulovou hypotézu $F = F_{1000}$(data mají normální rozdělení) proti alternativní hypotéze $F \neq F_{1000}$(data nemají normální rozdělení). Testová statistika je v tomto případě

$$D_n = sup_x|F_n(x) - F(x)|$$

a dává vysledky:

	IBM	Nestlé
D_{1000}	0.095	0.114
p-value	$2.407 * 10^{-4}$	$4.539 * 10^{-6}$

Dosažená hladina testu (p-value) je nejmenší hladina, při které bychom ještě zamítli nulovou hypotézu. Vidíme, že v obou případech je dostatečně malá, tedy nulovou hypotézu nezamítáme. Výsledek testu je, že marginální hustoty se chovají přibližně jako hustota normálního rozdělení. Následující obrázky porovnávají histogramy s hustotou normálního rozdělení s příslušnými parametry:



Víme, že kopula je distribuční funkce na $[0,1]^2$, jejíž marginály mají rovnoměrné rozdělení na $[0,1]$. Když tedy známe marginální rozdělení, můžeme vzít hodnoty kumulativních distribučních funkcí a dostaneme náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $[0,1]$. Tedy kopula již nezávisí na chování marginálů.

Nyní z definice vypočítejme Kendallovo τ a pro porovnání i korelační koeficient ρ a Spearmanovo ρ_S:

τ	0.080
ρ	0.328
ρ_S	0.121

Pomocí τ můžeme podle Věty 33 odhadnout parametr pro každou rodinu Archimédovských kopulí.

Pro Gumbelovu rodinu dostáváme (použijeme per partes):

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta}([\frac{t^2}{2}\ln t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt) = 1 + \frac{4}{\theta}(0 - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{\theta}$$

Pro Claytonovu rodinu:

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta}(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2}) = \frac{\theta}{\theta+2}$$

7.2 Parametrický odhad kopuly

Následující algoritmus generuje náhodné veličiny $u, v \sim R(0,1)$, jejichž sdružená distribuční funkce je Archimédovská kopula C s generátorem φ.

Algoritmus:

1. Generuj dvě nezávislé náhodné veličiny s a q s rovnoměrným rozdělením na $(0,1)$.
2. Polož $t = K^{-1}(q)$, kde K je distribuční funkce $C(u,v)$.
3. Polož $u = \varphi^{-1}(s\,\varphi(t))$ a $v = \varphi^{-1}((1-s)\,\varphi(t))$.

Distribuční funkce $C(u,v)$ je definována jako $K = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$. Pokud inverzní funkce K^{-1} nemá uzavřený tvar, použije se k hledání kořene v rovnici $(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}) - q = 0$ numerická metoda.

Po dosazení dostáváme:

	θ	$\varphi(t)$	$\varphi'(t)$	$\varphi^{-1}(t)$	K	K^{-1}
Gumbel	$\frac{1}{1-\tau}$	$(-\ln t)^{\theta}$	$\frac{-\theta}{t}(\ln t)^{\theta-1}$	$e^{(-\frac{1}{t^{\theta}})}$	$t - \frac{t\ln t}{\theta}$	$-\frac{ln(t)}{\theta} - \frac{1}{\theta} + 1$
Clayton	$\frac{2\tau}{1-\tau}$	$t^{-\theta} - 1$	$-\theta t^{-\theta-1}$	$(1+t)^{-\frac{1}{\theta}}$	$t - \frac{t^{\theta+1}-t}{\theta}$	$-\frac{t^{\theta}(\theta+1)}{\theta} + \frac{1}{\theta} + 1$

Použitím algoritmu máme pro Gumbelovu rodinu

$$u = \exp(-(s(-\ln(t))^{\theta})^{1/\theta}),\ v = \exp(-((1-s)(-\ln(t))^{\theta})^{1/\theta})$$

a pro Claytonovu rodinu

$$u = (1 + s(t^{-\theta} - 1))^{-1/\theta},\ v = (1 + (1-s)(t^{-\theta} - 1))^{-1/\theta}$$

Tedy máme náhodné veličiny $u, v \sim R(0,1)$, jejichž sdružená distribuční funkce je kopula z Gumbelovy nebo Claytonovy rodiny. Zbývá dosadit do kvantilové funkce, v našem případě $U = \Phi^{-1}(u)$ a $V = \Phi^{-1}(v)$. Dostali jsme náhodné veličiny, jejichž sdružená distribuční funkce je kopula a marginály mají normální rozdělení.

7.3 Neparametrický odhad kopuly

Algoritmus:

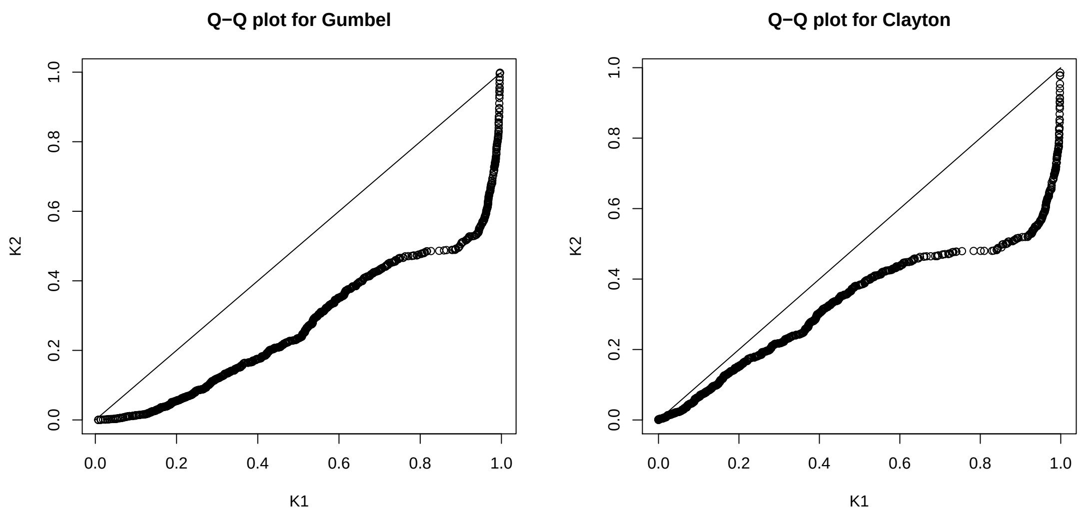
1. Definujme vektor tzv.pseudo-pozorování:
   t_i={počet pozorování $(X_j < X_i) : (X_j < X_i)$ a $(Y_j < Y_i)\}/(n-1)$
   pro i=1,...1000

2. Pomocí θ určeme $\varphi(t)$.

3. $K(t)$ je určena svým generátorem $\varphi(t)$.

7.4 Výběr vhodné kopuly

Nyní přichází na řadu otázka, jak vybrat nejvhodnější kopuli. Předpokládejme, že K1 je neparametrický a K2 je parametrický odhad kopuly. Jednou z možností je použít tzv. Quantile-Quantile plot (Q-Q plot). Q-Q plot je grafické zobrazení kvantilů K1 ku kvantilům K2. Čím méně se Q-Q plot vychyluje od křivky 45%, tím jsou kopuly více podobné a tedy lépe odhadují reálná data.



Z grafů je vidět, že pro naše reálná data dává lepší odhad Claytonova kopula.

Kapitola 8

Závěr

Je zřejmé, že pro data, která mají rozdělení s těžkými chvosty, nastávají velké výkyvy častěji, než by se předpokládalo při odhadu normálním rozdělením. Proto tento odhad není vhodný při modelování sdruženého rizika. Eliminaci tohoto nedostatku přináší teorie a náslená aplikace kopulových funkcí, kterými se tato bakalářská práce zabývala.

Nejprve definovala samotnou kopuli a uvedla základní vlastnosti, především Sklarovu větu. Poté se věnovala dalším vlastnostem kopulí souvisejících s náhodnými veličinami, definovala kopuly přežití a ukázala algoritmus generování náhodných jevů.

Dále popsala různé míry závislosti a porovnala jejich výhody a nevýhody. Následně se již věnovala jednotlivým rodinám kopulí, uvedla jejich nejdůležitější charakteristiky a naznačila, za jakých okolností je vhodné jejich použití.

Poslední část práce se soustředila na Archimédovské kopuly, na konkrétních datech s pomocí statistického softwaru R předvedla algoritmus pro hledání marginálních rozdělení a výběr kopuly, která nejlépe odhaduje sdružené rozdělení.

Námětem pro další studium by mohlo být přesnější odhadování marginálních rozdělení dat a hlubší analýza podmínek ovlivňujících výběr vhodné rodiny kopulí.

Literatura

[1] K. Zvára, J. Štěpán: Pravděpodobnost a matematická statistika, Matfyzpress Praha, 2002

[2] J. Anděl: Základy matematické statistiky, UK v Praze, MFF, 2002

[3] R. Nelsen: An Introduction to Copulas, Springer New York, 1999

[4] P. Embrechts, F. Lindskog, A. McNeil: Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, in: Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, ed. S. Rachev, Elsevier, Chapter 8, pp. 329-384, 2003

[5] J. V. Rosenberg, T. Schuermann (2004): A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risk. Federal Reserve Bank of New York, Staff Reports

[6] M. R. Melchiori (2003): Which Archimedean Copula is the right one? Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, http://www.riskglossary.com/papers/Copula carta.pdf