Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Luděk Kleprlík

Vztah spojitých a parciálně spojitých funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Rád bych poděkoval všem, kteří mi zapůjčili potřebnou literaturu nebo mě jakkoliv podpořili při psaní této bakalářské práce. Zejména děkuji mému vedoucímu RNDr. Stanislavu Henclovi, Ph.D., který se mnou podrobně prokonzultoval náplň práce a diskutoval o problémech při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5. 8. 2007 Luděk Kleprlík

Obsah

Název práce: Vztah spojitých a parciálně spojitých funkcí
Autor: Luděk Kleprlík
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
e-mail vedoucího: hencl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vztah mezi spojitými a parciálně spojitými funkcemi (tedy funkcemi spojitými po přímkách rovnoběžných s osami). Práce se zaměřuje na konstrukci parciálně spojité funkce, která má množinu bodů nespojitosti kladné míry. V druhé části dokazujeme, že za určitých dodatečných podmínek je parciálně spojitá funkce již spojitá. V závěrečné kapitole ukazujeme, že v rovině je množina bodů nespojitosti parciálně spojité funkce 1.kategorie.

Klíčová slova: Parciální spojitost, Spojitost, Funkce více reálných proměnných

Title: Relation between continuous and partially continuous functions
Author: Luděk Kleprlík
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: RNDr. Stanislav Hencl Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hencl@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study relation between continuous and partially continuous functions (the functions, that are continuos on the lines parallel to coordinate axes). We construct partially continuous function, which set of discontinuity point has positive measure. In the second part we study some conditions, which guarantee, that each partially continuous function is continuous. In the last chapter we show, that the set of discontinuity of partially continuous function in the plane is of the first cathegory.

Keywords: Partial continuity, Continuity, Functions of several real variables

Úmluvy a značení

Symbolem $\mathbb{N}$ označujeme přirozená čísla a symbolem $\mathbb{R}$ reálná čísla. Počátkem nazýváme bod $(0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$.

V celé práci používáme symbol $|.|$ pro maximovou metriku na $\mathbb{R}^n$

$$|x-y| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|.$$

Dále $P^n_\delta(x)$ označuje δ okolí v maximové metrice, to jest množinu

$$P^n_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \delta\}.$$

V případě $n = 1$ píšeme pouze $P_\delta(x)$.

Symbolem $f(x,.)$ myslíme funkci závislou pouze na proměnné, místo které je tečka. Tedy $f(x,.)$ označuje funkci $g(t) = f(x,t)$ s definičním oborem

$$\{y : (x,y) \text{ je v definičním oboru } f\}.$$

Mluvíme-li o množině bodů (ne)spojitosti funkce f, tak máme na mysli množinu bodů, ve kterých funkce f je (není) spojitá.

Dále následují symboly použité ve spojením s množinami.
Symbol $\overline{A}$ označuje uzávěr množiny A, to jest

$$\overline{A} = \{x : \text{ existuje posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ taková, že } x_n \in A \text{ a } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.$$

Symbol A^0 označuje vnitřek množiny A, to jest

$$A^0 = \{x : \text{ existuje } \delta > 0 \text{ takové, že } P_\delta(x) \subset A\}.$$

Symbol ∂A označuje hranici množiny A, to jest

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^0.$$

Symbol $\times$ označuje množinový součin, to jest

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ a } b \in B\}.$$

Symbol A^2 označuje množinový součin A sama se sebou, to jest

$$A^2 = A \times A.$$

Množinou hromadných bodů množiny A rozumíme množinu

$$\{x : \text{ existuje posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ taková, že } x_n \in A \setminus \{x\} \text{ a } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.$$

Krychlí $Q(c,r)$ myslíme množinu $\{x : |x-c| < r\}$.

Je-li $x \in \mathbb{R}^n$, symbolem x_i, kde $i \in \{1,\dots,n\}$, označujeme i. souřadnici x. Symbolem $\vec{x}$ zdůrazňujeme, že $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pro $n \in \{2,3,\dots\}$. Symbol $(\vec{x})_i$ nebo $\vec{x}_i$, kde $i \in \{1,\dots,n\}$, označuje i. souřadnici $\vec{x}$.

Lebesgueovu n-rozměrnou míru budeme označovat symbolem λ_n a pro $n = 1$ volíme označení λ. Mluvíme-li v práci o vlastnosti skoro všude, tak máme na mysli skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

KAPITOLA 1

Úvod

Definice 1.1. Nechť D_f je podmnožina $\mathbb{R}^n$. O funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *spojitá* v $x \in D_f$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\text{pro každé } y \in D_f \text{ platí } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

O funkci f řekneme, že je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě D_f.

Definice 1.2. Nechť D_f je podmnožina $\mathbb{R}^n$. O funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *parciálně spojitá* v bodě $x = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$, pokud jsou funkce

$$g(t) = f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) \text{ spojité v } 0 \text{ pro každé } 1 \le i \le n.$$

O funkci f řekneme, že *parciálně spojitá*, pokud je parciálně spojitá v každém bodě svého definičního oboru D_f.

V této práci se budeme zabývat vztahem mezi spojitými a parciálně spojitými funkcemi. Poznamenejme, že každá spojitá funkce je triviálně parciálně spojitá. Schéma práce je vytvořené podle [**4**]. Ve druhé kapitole poměrně elementární konstrukcí získáme parciálně spojitou funkci, jejíž množina bodů nespojitosti bude hustá. Ve stěžejní třetí kapitole zkonstruujeme pomocí Cantorova diskontinua parciálně spojitou funkci, jejíž množina bodů nespojitosti bude dokonce plné míry. Ve čtvrté kapitole dokážeme, že některé dodatečné podmínky (oddělená monotonie či ekvispojitost v $(n-1)$ proměnných) na vlastnosti parciálně spojité funkce nám už zaručí její spojitost. V závěrečné páté kapitole studujeme, jak vypadá množina bodů nespojitosti parciálně spojité funkce v rovině, konkrétně dokážeme, že je 1. kategorie. Z čehož vyplývá, že konstrukce funkce ve třetí kapitole nemůže být příliš triviální.

V práci budeme používat následující známou Moore-Osgoodovu větu o záměně limity u stejnoměrné konvergence (v jedné dimenzi viz. [**2**, Věta 59]). Pro pohodlí čtenáře uvádíme i její důkaz. Nejdříve si však pro úplnost uveďme definici stejnoměrné konvergence.

Definice 1.3. Nechť D je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nechť f_n, f jsou funkce definované na množině D do $\mathbb{R}$. Pak řekneme, že funkce f_n *konvergují stejnoměrně* k funkci f na D (symbolicky $f_n \rightrightarrows f$ na D), pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\text{pro každé } n > n_0 \text{ a pro každé } x \in D \text{ platí } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Věta 1.4 (Moore-Osgood). *Buď f_n posloupnost funkcí stejnoměrně konvergujících k f na množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Nechť a je hromadným bodem M a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim_{x \to a, x \in M} f_n(x) =: b_n$. Potom existují vlastní limity $\lim_{x \to a, x \in M} f(x)$, $\lim_{n \to \infty} b_n$ a rovnají se. Tedy platí*

$$\lim_{n \to \infty} \Big(\lim_{x \to a, x \in M} f_n(x) \Big) = \lim_{x \to a, x \in M} \Big(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \Big).$$

Důkaz. (i) Nejdříve ověříme existenci limity $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Posloupnost funkcí

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že pro všechna } m, n > n_0$$
$$\text{a pro všechna } x \in M \text{ platí } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Použitím limitního přechodu (víme, že $f_n(x) \overset{x\to a}{\to} b_n$) získáme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\text{pro všechna } m, n > n_0 \text{ platí } |b_n - b_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská posloupnost, a tedy existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Označme ji b.

(ii) Potřebujeme ověřit, že $\lim\limits_{x\to a, x\in M} f(x) = b$.
Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$ a zároveň pro všechny $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Díky existenci $\lim\limits_{x\to a, x\in M} f_n(x) = b_n$ existuje δ takové, že

$$\text{pro všechny } x \in P_\delta^n(a) \cap M \text{ platí } |f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tedy pro všechny $x \in P_\delta^n(a) \cap M$ dostaneme

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

□

Důsledek 1.5. *Nechť M je podmnožinou $\mathbb{R}^n$, $f_n, f : M \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a $f_n \rightrightarrows f$ na M. Pak f je spojitou funkcí z M do $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Volme $x_0 \in M$ Není-li x_0 hromadným bodem M, je spojitost f v x_0 triviálně splněna. Tedy předpokládejme, že je hromadným bodem. Využítím Moore-Osgoodovy věty 1.4 a spojitosti f_n získáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0, x\in M} f(x) &= \lim_{x\to x_0, x\in M}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to x_0, x\in M} f_n(x)\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).\end{aligned}$$

Tedy funkce f je v každém bodě svého definičního oboru M spojitá. □

KAPITOLA 2

Elementární konstrukce nespojitých funkcí

V této kapitole uvedeme příklady jednoduchých funkcí, které jsou parciálně spojité, ale nejsou spojité.

PŘÍKLAD 2.1. *Definujme funkci* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *předpisem*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{pro } x = y = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Tato funkce má následující vlastnosti:

(i) *Funkce* f *je spojitá v bodech* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*.*
(ii) *Funkce* f *je parciálně spojitá v* $\mathbb{R}^2$*.*
(iii) *Funkce* f *není spojitá v bodě* $(0,0)$*.*
(iv) *Funkce* $|f|$ *je omezená konstantou* 1 *v* $\mathbb{R}^2$*.*

DŮKAZ. (*i*) Jedná se o podíl dvou spojitých funkcí, kde funkce ve jmenovateli je různá od 0. Tedy f je spojitá.

(*ii*) Pro $(x,y) \neq (0,0)$ dostáváme parciální spojitost ze spojitosti funkce f. Pro $x = 0$ víme, že $f(0,y) \equiv 0$, a tedy je $f(0,.)$ spojitá. Pro druhou proměnou je problém symetrický.

(*iii*) Pokud volíme posloupnost bodů $x_n = y_n = \frac{1}{n}$, potom

$$(x_n, y_n) \stackrel{n\to\infty}{\to} (0,0) \text{ a } \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})^2}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1/2 \neq f(0,0).$$

Tedy funkce f není v $(0,0)$ spojitá.

(*iv*) Převedeme problém na sférické souřadnice. Pro $x = r\sin\phi, y = r\cos\phi$ dostaneme

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^2 \sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi}\right| = |\sin\phi\cos\phi| \leq 1.$$

□

PŘÍKLAD 2.2. *Nechť* f *je funkce definovaná v* (2.1)*. Seřaďme do posloupnosti* $\{(p_i,q_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *všechny body* $\mathbb{R}^2$ *s racionálními souřadnicemi. Definujme*

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(x-p_i, y-q_i).$$

Tato funkce splňuje:

(i) *Řada funkcí* $\sum \frac{1}{2^i} f(x-p_i, y-q_i)$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}^2$*.*
(ii) *V každém bodě s alespoň jednou iracionální souřadnicí je funkce* g *spojitá.*
(iii) *Funkce* g *je parciálně spojitá.*
(iv) *V každém bodě s oběma racionálními souřadnicemi není funkce* g *spojitá.*

Důkaz. Definujme si funkce

$$f_i(x,y) = \frac{1}{2^i} f(x-p_i, y-q_i).$$

(i) Zřejmě

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{n} f_i(x,y) - g(x,y)\Big| &= \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(x-p_i, y-q_i)\Big| \\ &\le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |f(x-p_i, y-q_i)| \le 2^{-n} \to 0,\end{aligned}$$

kde jsme využili vlastnost $|f| \le 1$ (viz Příklad 2.1(iv)).

(ii) Víme, že všechny funkce f_i jsou v bodě s alespoň jednou iracionální souřadnicí spojité. Analogicky důkazu Důsledku 1.5 dostaneme spojitost funkce g v každém bodě s iracionální souřadnicí.

(iii) Parciální spojitost funkce g plyne z $\sum f_i(x,.) \rightrightarrows g(x,.)$, spojitosti funkcí $f_i(x,.)$(viz Příklad 2.1 (ii)) a Důsledku 1.5.

(iv) Buď (q_l, r_l) náš bod s racionálními koeficienty, pak $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}\setminus\{l\}} f_i$ je spojitá v (p_l, q_l) (podobně jako v (ii)). Pak

$$g = \sum_{i\in\mathbb{N}\setminus\{l\}} f_i + f_l,$$

což je součet spojité a nespojité funkce v (q_l, r_l), a tedy g není spojitá v (q_l, r_l). □

Takže jsme našli parciálně spojitou funkci, u které je množina bodů nespojitosti hustá v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. *Analogie Příkladu 2.1 a Příkladu 2.2 se dají lehce zkonstruovat i ve vyšší dimenzi. Definujme* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *předpisem*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 \dots x_n}{|x_1|^n + \dots + |x_n|^n} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

a postupujeme analogicky.

KAPITOLA 3

Složitější konstrukce za použití Cantorova diskontinua

V této stěžejní kapitole zkonstruujeme parciálně spojitou funkci, která není spojitá skoro všude.

PŘÍKLAD 3.1 (pyramidová funkce[1]). *Pro* $c \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}$ *definujeme funkci* $F_{c,r}$ *předpisem*

$$F_{c,r} = \begin{cases} 1 - \frac{|x-c|}{r} & \textit{pro } |x-c| \le r \\ 0 & \textit{jinak} . \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá na $\mathbb{R}^2$*, je nulová na hranici* $|x-c| = r$ *a rovna* 1 *ve středu* c *čtverce* $Q(c,r)$*.*

TVRZENÍ 3.2. *Existuje parciálně spojitá funkce, která není spojitá.*

DŮKAZ. Buď funkce $F_{c,r}$ jako v Příkladu 3.1. Položme

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} F_{(2^{-i},2^{-i}),2^{-(i+2)}} \ .$$

Potom f splňuje

(i) Funkce f je spojitá v bodech $\mathbb{R}^2$ bez počátku.
(ii) Funkce f je parciálně spojitá na $\mathbb{R}^2$.
(iii) Funkce f není spojitá v počátku.

(*i*) Buď $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Najdeme $\delta > 0$ splňující $x \notin \overline{P^2_\delta\big((0,0)\big)}$. Jelikož pro každý bod $x \in Q\big((2^{-i},2^{-i}),2^{-(i+2)}\big)$ je $|x-0| \le 2^{-i} + 2^{-(i+2)} \overset{i\to\infty}{\to} 0$, existuje n_0 takové, že

$$\text{pro všechny } n \ge n_0 \text{ je } Q\big((2^{-i},2^{-i}),2^{-(i+2)}\big) \subset P^2_\delta\big((0,0)\big).$$

Proto na okolí bodu x lze funkci f vyjádřit jako konečný součet spojitých funkcí

$$f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{P^2_\delta(0,0)}} = \sum_{i=1}^{n_0} F_{(2^{-i},2^{-i}),2^{-(i+2)}}.$$

Tedy i f je v x spojitá.

(*ii*) Díky (*i*) stačí ověřit parciální spojitost f v počátku. Jelikož osy neprochází žádným čtvercem $Q\big((2^{-i},2^{-i}),2^{-(i+2)}\big)$, je funkce f na osách nulová, a tedy spojitá.

(*iii*) Protože středy čtverců (body $(2^{-i},2^{-i})$), v nichž je funkce rovna 1, jdou k počátku a hodnota v počátku se rovná 0, funkce f není v počátku spojitá. □

Pro další větu budeme potřebovat zkonstruovat *Cantorova diskontinua* (viz [**5**, Kapitola 1]).

[1] Graf funkce v $\mathbb{R}^3$ je tvořen pyramidou výšky 1 s čtvercovou základnou $Q(c,r)$.

Konstrukce 3.3 (Cantorovo diskontinuum). *Vyjdeme z intervalu $I = [0,1]$. Nechť $i \in \mathbb{N}$ je pevně zvolené číslo.*

V prvním kroku z I vyjměme otevřený interval $I_1^1 = I_1$ délky $\frac{1}{3^i}$, který bude ve středu intervalu $[0,1]$ (to jest $I_1 = \left(\frac{1-\frac{1}{3^i}}{2}, \frac{1+\frac{1}{3^i}}{2}\right)$).

V druhém kroku ze dvou zbývajících uzavřených intervalů

$$L_1^1 = \left[0, \frac{1-\frac{1}{3^i}}{2}\right] \text{ a } L_1^2 = \left[\frac{1+\frac{1}{3^i}}{2}, 1\right]$$

odstraníme intervaly I_2^1, I_2^2 délky $\frac{1}{3^{i+1}}$, které budou ve středu zbývajících intervalů, a tak získáme 4 uzavřené intervaly. Označme $I_2 = I_2^1 \cup I_2^2$. Tímto způsobem budeme pokračovat dále.

Na začátku n-tého kroku postupu zbývá 2^{n-1} uzavřených intervalů, které označme $L_{n-1}^1, \dots, L_{n-1}^{2^{n-1}}$. Ze středu L_{n-1}^j odebereme interval I_n^j délky $\frac{1}{3^{i+n-1}}$. Označme $I_n = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_n^j$. Pak definujme pro $i \in \mathbb{N}$ Cantorovo diskontinuum[2] C_i předpisem

$$C_i = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Diskontinuum má následující vlastnosti

(i) *Lebesgueova míra $\lambda(C_i) = 1 - \frac{1}{3^{i-1}}$.*

(ii) *Označme $L_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} L_n^i$. Potom*

$$C_i = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{2^{n-1}} I_n^l = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{2^n} L_n^l = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n.$$

(iii) *Označme $S = \{x \in [0,1] \colon$ existuje interval I_n^k takový, že x je jeho středem$\}$. Potom množina hromadných bodů S je nadmnožinou C_i.*

Důkaz. (*i*) Zřejmě

$$\lambda(C_i) = \lambda([0,1]) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = 1 - \left(\frac{1}{3^i} + \frac{2}{3^{i+1}} + \frac{2^2}{3^{i+2}} + \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3^i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3^i} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{3^{i-1}}.$$

(*ii*) První a třetí rovnost plyne přímo z definice I_n, respektive L_n. Stačí už jen ukázat $C_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$. Užitím de Morganových pravidel získáme

$$C_i = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n.$$

(*iii*) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je C_i podmnožinou L_n, což je sjednocení 2^n stejně velkých intervalů $L_n^k \subset [0,1]$. Proto je velikost intervalu L_n^k menší nebo rovna 2^{-n}. Při konstrukci Cantorova diskontinua během $(n+1)$. kroku z každého L_n^k odstraňujeme interval I_{n+1}^k. Tedy L_n^k obsahuje bod množiny S. Proto je-li $c \in C_i$,

[2] Cantorovým diskontinuem se obvykle označuje případ $i = 1$.

pak je pro každé n vzdálenost bodu c od množiny S menší nebo rovna 2^{-n}. Z toho plyne, že je rovna 0, tudíž je c hromadným bodem S.

$\square$

POZNÁMKA. *Pro úplnost zmiňme další známé vlastnosti Cantorova diskontinua C_i, které nebudeme dále potřebovat, proto jsou uvedeny bez důkazu (viz* [**5**]*).*

(i) *Množina C_i je uzavřená.*
(ii) *Množina C_i je nespočetná.*
(iii) *Množina C_i je řídká.*

VĚTA 3.4. *Existuje parciálně spojitá funkce, jejíž množina bodů nespojitosti má kladnou míru.*

DŮKAZ. Buď I_n, I_n^k, L_n, L_n^k jako v Konstrukci 3.3 a $F_{c,r}$ jako v Příkladu 3.1. Nyní budeme potřebovat vědět, jak vypadá $C_i \times C_i,\ i \in \mathbb{N}$. Uvědomme si, že

$$\begin{aligned}(x, y) \notin C_i^2 &\Leftrightarrow (x \notin C_i \text{ nebo } y \notin C_i)\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} : x \in I_n \times [0,1] \text{ nebo } \exists n \in \mathbb{N} : y \in [0,1] \times I_n).\end{aligned}$$

Tedy C_i^2 můžeme dostat z $[0,1]^2$ odstraňováním křížků $K_n^{k,l}$, to jest množin

$$\big(I_n^k \times [0,1]\big) \ \cup\ \big([0,1] \times I_n^l\big),\ n \in \mathbb{N},\ k, l \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}.$$

Uprostřed kříže je čtverec

$$Q_n^{k,l} := I_n^k \times I_n^l = \big(I_n^k \times [0,1]\big) \cap \big([0,1] \times I_n^l\big).$$

Ukažme, že každý kříž $K_n^{k,l}$ protíná jen konečně mnoho čtverců $Q_{\tilde{n}}^{\tilde{k},\tilde{l}}$. Z konstrukce C_i přímo plyne, že $I_n^k \cap I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} = \emptyset$ pro $n \neq \tilde{n}$ nebo $k \neq \tilde{k}$. Proto i

$$\big(I_n^k \times [0,1]\big) \cap \big(I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} \times [0,1]\big) = \emptyset \text{ a také } \big(I_n^k \times [0,1]\big) \cap \big(I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} \times I_{\tilde{n}}^{\tilde{l}}\big) = \emptyset.$$

Analogicky se ukáže, že i $\big([0,1] \times I_n^l\big) \cap \big(I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} \times I_{\tilde{n}}^{\tilde{l}}\big) = \emptyset$. Proto platí

$$K_n^{k,l} \cap \big(I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} \times I_{\tilde{n}}^{\tilde{l}}\big) = \Big(\big(I_n^k \times [0,1]\big) \cap \big(I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} \times I_{\tilde{n}}^{\tilde{l}}\big)\Big) \cup \Big(\big([0,1] \times I_n^l\big) \cap \big(I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} \times I_{\tilde{n}}^{\tilde{l}}\big)\Big) = \emptyset,$$

kdykoliv $\tilde{n} > n$. Čtverců $I_{\tilde{n}}^{\tilde{k}} \times I_{\tilde{n}}^{\tilde{l}}$ pro $\tilde{n} \leq n$ je jen konečně mnoho, a tedy $K_n^{k,l}$ protíná jen konečně mnoho čtverců $Q_{\tilde{n}}^{\tilde{k},\tilde{l}}$ naší konstrukce.

Všimněme si, že každá přímka rovnoběžná s osou x nebo osou y protíná pouze konečný počet těchto čtverců. Prochází-li přímka $P = \{(x_0, y) : y \in [0,1]\}$ bodem $(x_0, c_2) \in C_i^2$ pak $x_0 \notin I_n^k$ pro všechna n a k. Proto

$$P \cap \big(I_n^k \times [0,1]\big) = \emptyset, \text{ a tedy } P \cap Q_n^{k,l} = \emptyset.$$

Neprochází-li přímka P Cantorovým diskontinuem C_i^2, potom existují $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$ takové, že $x_0 \in I_n^k$ (jinak by bylo $(x_0, x_0) \in P \cap C_i^2$). Potom platí $P \subset K_n^{k,k}$, kde kříž $K_n^{k,k}$ protíná pouze konečně mnoho čtverců $Q_n^{\tilde{k},\tilde{l}}$, proto i P protíná pouze konečně mnoho čtverců $Q_{\tilde{n}}^{\tilde{k},\tilde{l}}$. Zcela analogicky se ukáže pro přímku rovnoběžnou s osou y.

Nyní už můžeme přistoupit k samotné konstrukci funkce. Každému čtverci $Q_n^{k,l}$ přiřadíme spojitou funkci $G_{Q_n^{k,l}} = F_{c,r}$, kde c je střed čtverce $Q_n^{k,l}$ a r je polovina délky hrany (která se rovná délce intervalu I_n^k). Položme

$$g_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{2^{n-1}} G_{Q_n^{k,l}}(x). \tag{3.1}$$

Ukážeme, že

(i) Suma je korektně definovaná a $0 \leq g_i \leq 1$.
(ii) Funkce g_i je parciálně spojitá.
(iii) Funkce g_i není právě v bodech C_i^2 spojitá.
(iv) Míra množiny bodů, ve kterých není funkce g_i spojitá, je $(1-3^{-(i-1)})^2$.

(i) Jelikož je $G_{Q_n^{k,l}}$ nenulová pouze na čtvercích $Q_n^{k,l}$, které se nepřekrývají, a $G_{Q_n^{k,l}} \leq 1$, je suma korektně definovaná s hodnotami mezi 0 a 1.

(ii) Nechť $x_0 \in [0,1]$. Množina $P = \{(x_0, y), y \in [0,1]\}$ určuje přímku rovnoběžnou s osou x. Jelikož přímka protíná jen konečně mnoho čtverců $Q_n^{k,l}$, lze restrikci g_i na tuto přímku psát jako součet konečně mnoha spojitých funkcí $G_{Q_n^{k,l}}|_P$ pro nějakou kombinaci n, k, l. Tedy se jedná o spojitou funkci. Analogicky se ukáže spojitost na přímce rovnoběžné s osou y.

(iii) Každý bod Cantorova diskontinua je hromadným bodem množiny S středů intervalů I_n^k (viz vlastnosti Cantorova diskontinua 3.3 (iii)). Buď $(c_1, c_2) \in C_i^2$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najdeme $s, t \in S$ splňující

$$|s - c_1| < \varepsilon \text{ a } |t - c_2| < \varepsilon, \text{ a tedy } |(c_1, c_2) - (s,t)| < \varepsilon.$$

Proto množina hromadných bodů S^2 je nadmnožinou C_i^2.

Volme $(c_1, c_2) \in C_i^2$ a $(s_n, t_n) \in S^2$ posloupnost k němu jdoucí. Jelikož $g_i(c_1, c_2) = 0$ a $g_i(s_n, t_n) = 1$, není funkce g_i spojitá v (c_1, c_2).

Buď $(x_1, x_2) \notin C_i^2$. Z konstrukce C_i^2 plyne existence kříže $K_n^{k,l}$ obsahujícího bod (x_1, x_2). Tento kříž $K_n^{k,l}$ protíná jen konečně mnoho čtverců $Q_{\tilde{n}}^{\tilde{k},\tilde{l}}$. Proto na okolí bodu $P_\delta^2(x_1, x_2)$, pro $\delta > 0$ dost malé, lze psát restrikci $g_i|_{P_\delta^2(x_1,x_2)}$ jako součet konečně mnoha spojitých funkcí $G_{Q_{\tilde{n}}^{\tilde{k},\tilde{l}}}|_{P_\delta^2(x_1,x_2)}$, a tedy je v tomto bodě g_i spojitá.

(iv) Plyne přímo z *(iii)* a vlastností Lebesqueovy míry, neboť

$$\lambda_2(C_i^2) = \big(\lambda(C_i)\big)^2 = (1 - 3^{-i+1})^2.$$

□

Věta 3.5. *Existuje parciálně spojitá funkce, jejíž množina bodů nespojitosti má plnou míru.*

Důkaz. Buď g_i funkce z důkazu Věty 3.4 (viz (3.1)). Potom položme

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} g_i(x).$$

Tato funkce h má vlastnosti

(i) Řada funkcí $\sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} g_i$ konverguje stejnoměrně k h na $\mathbb{R}^2$.
(ii) Funkce h je parciálně spojitá.
(iii) Funkce h není spojitá v bodech C_i^2 pro všechny $i \in \mathbb{N}$.
(iv) Míra množiny bodů, ve kterých g_i není spojitá, má plnou míru, to jest je rovna $1 = \lambda_2([0,1]^2)$.

(i) Využitím znalosti $|g_i(x,y)| \le 1$ (viz vlastnost (i) z důkazu Věty 3.4), získáme odhad

$$\Big|h(x,y) - \sum_{i=1}^{k} 4^{-i} g_i(x,y)\Big| = \Big|\sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-i} g_i(x,y)\Big|$$
$$\le \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-i} |g_i(x,y)| \le \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-i} \to 0.$$

(ii) Zafixujme $x_0 \in [0,1]$. Z (i) plyne

$$\sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} g_i(x_0,y) \rightrightarrows h(x_0,y).$$

Díky Důsledku 1.5 a parciální spojitosti g_i (viz důkaz Věty 3.4 (ii)) získáváme spojitost funkce $h(x_0,y)$. Spojitost v první proměnné se dokáže zcela analogicky.

(iii) Buď $c \in C_i^2$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že g_j není spojité v c. Z naší konstrukce (viz důkaz Věty 3.4 (iii)) plyne existence posloupnosti b_k středů čtverců $Q_{\tilde{n}}^{\tilde{k},\tilde{l}}$ takových, že $b_k \overset{k\to\infty}{\to} c$ a $g_j(b_k) = 1$. Funkce h je spojitá v c jen pokud

$$\lim_{k\to\infty} h(b_k) = h(c) \text{ což je ekvivalentní } \lim_{k\to\infty} |f(b_k) - h(c)| = 0.$$

Elementárním výpočtem obdržíme

$$|h(b_k) - h(c)| \ge \Big|\sum_{i=1}^{j} 4^{-i}\big(g_i(b_k) - g_i(c)\big)\Big| - \Big|\sum_{i=j+1}^{\infty} 4^{-i}\big(g_i(b_k) - g_i(c)\big)\Big|$$
$$\ge \Big|\sum_{i=1}^{j} 4^{-i}\big(g_i(b_k) - g_i(c)\big)\Big| - \sum_{i=j+1}^{\infty} 4^{-i}|g_i(b_k) - g_i(c)|$$
$$\ge \Big|\sum_{i=1}^{j} 4^{-i}\big(g_i(b_k) - g_i(c)\big)\Big| - \frac{2}{3}4^{-j},$$

kde jsme využili $\sum\limits_{i=j+1}^{\infty} 4^{-i} = \frac{4^{-j}}{3}$ a $|g_i(b_k) - g_i(c)| \le 2$. Použijeme limitní přechod na obě strany této nerovnosti, využijeme spojitost g_i v c pro $i < j$ a dostaneme

$$\liminf_{k\to\infty} |h(b_k) - h(c)| \ge \lim_{k\to\infty}\Big|\sum_{i=1}^{j} 4^{-i}\big(g_i(b_k) - g_i(c)\big)\Big| - \frac{2}{3}4^{-j}$$
$$= \Big|\sum_{i=1}^{j} \lim_{k\to\infty} 4^{-i}\big(g_i(b_k) - g_i(c)\big)\Big| - \frac{2}{3}4^{-j}$$
$$= \Big|\sum_{i=1}^{j-1} \lim_{k\to\infty} 4^{-i}\big(g_i(b_k) - g_i(c)\big) + \lim_{k\to\infty} 4^{-j}\big(g_j(b_k) - g_j(c)\big)\Big| - \frac{2}{3}4^{-j}$$
$$= |0 + 4^{-j}| - \frac{2}{3}4^{-j} = \frac{1}{3}4^{-j} > 0.$$

Tedy funkce h není spojitá v c.

(*iv*) Díky (*iii*) platí, že míra množiny bodů nespojitosti je větší než míra $\bigcup_{i\in N} C_i^2$ a díky znalosti (i) z Konstrukce 3.3 spočítáme

$$\lambda_2\Big(\bigcup_{i\in N} C_i^2\Big) \geq \lambda_2\big(C_i^2\big) = (1-3^{1-i})^2 \overset{i\to\infty}{\to} 1 = \lambda([0,1]^2).$$

Tím je dokázáno, že množina bodů nespojitosti je plné míry. $\square$

POZNÁMKA. *V $\mathbb{R}^n$ lze jistě dokázat analogie Věty 3.5.*

KAPITOLA 4

Postačující podmínky spojitosti

V této kapitole dokážeme, že za určitých dodatečných podmínek už z parciální spojitosti plyne spojitost.

DEFINICE 4.1. Nechť D je podmnožina $\mathbb{R}^n$. Potom řekneme, že funkce $\{f_i\}_{i\in I}$, $f_i : D \to \mathbb{R}$, jsou *ekvispojité*, pokud pro každé $x \in D$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $i \in I$

$$\text{a pro všechna } y \in D \text{ platí } |x-y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

VĚTA 4.2. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená a nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je parciálně spojitá. Předpokládejme, že jsou funkce $f^y(\vec{x}) := f(\vec{x}, y)$, $\vec{x} \in R^n$, $y \in \mathbb{R}$ ekvispojité. Potom je funkce f spojitá.*

DŮKAZ. Ukážeme, že funkce f je spojitá v každém bodě $(\vec{x}_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $(\vec{x}_0, y_0) = (0,0)$ (jinak bychom pracovali s funkcí $g(\vec{x}, y) = f(\vec{x} - \vec{x}_0, y - y_0)$).

Z parciální spojitosti funkce f je funkce $f(x, .)$ spojitá, tedy lze nalézt $\delta_1 > 0$ takové, že $P^{n+1}_{\delta_1}\big((0,0)\big) \subset G$ a

$$\text{pro všechny } |y| < \delta_1 \text{ je } |f(0,y) - f(0,0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z ekvispojitosti funkcí f^y najdeme $\delta_2 > 0$, které nezávisí na y, takové, že

$$\text{pro každé } |\vec{x}| < \delta_2 \text{ platí } |f(\vec{x}, y) - f(0, y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Všimněme si, že je-li $(\vec{x}, y) \in P^{n+1}_{\delta}\big((0,0)\big)$, pak je i $(0, y) \in P^{n+1}_{\delta}\big((0,0)\big) \subset G$, a je tedy $f(0, y)$ definováno. Zvolíme-li $\vec{x}$,y takové, že $|\vec{x}| < \delta$ a zároveň $|y| < \delta$, tj. $(\vec{x}, y) \in P^{n+1}_{\delta}\big((0,0)\big)$, potom

$$|f(\vec{x}, y) - f(0,0)| \le |f(\vec{x}, y) - f(0,y)| + |f(0,y) - f(0,0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

VĚTA 4.3. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je parciálně spojitá. Předpokládejme, že pro každé y je funkce $f^y(x) := f(x, y)$ monotonní na množině $G_y = \{x : (x, y) \in G\}$. Potom je funkce f spojitá.*

DŮKAZ. Zvolme bod $(x_0, y_0) \in G$ a $\varepsilon > 0$. Z parciální spojitosti k němu najdeme $\delta_1 > 0$ takové, že $P^2_{\delta_1}\big((x_0, y_0)\big) \subset G$ a že

$$\text{pro každé } x \text{ splňující } |x - x_0| \le \delta_1 \text{ platí } |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Díky parciální spojitosti v druhé proměnné najdeme δ_2 splňující

$$|f(x_0 + \delta_1, y_0) - f(x_0 + \delta_1, y)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } |y - y_0| \le \delta_2.$$

Podobně najdeme δ_3 splňující

$$|f(x_0 - \delta_1, y_0) - f(x_0 - \delta_1, y)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } |y - y_0| \le \delta_3.$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Buď $(x, y) \in P^2_\delta\big((x_0, y_0)\big)$. Předpokládejme, že f^y je neklesající (Jinak bychom pracovali s funkcí $g = -f$.). Potom

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &< \big(f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)\big) + \big(f(x_0 + \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)\big)\\
&\le f(x, y) - f(x_0, y_0)\\
&\le \big(f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)\big) + \big(f(x_0 + \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)\big) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy pro všechny $(x, y) \in P^2_\delta\big((x_0, y_0)\big)$ platí $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. □

Definice 4.4. O funkci $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *odděleně monotonní v proměnné x_i*, pokud pro každý bod $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$ je funkce $g(t) = f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)$ definovaná na množině

$$M_i = \{t \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) \in M\}$$

monotonní.

Poznámka. *Funkce f může být neklesající nebo nerostoucí v proměnné x_i v závislosti na volbě zbývajících souřadnic.*

Věta 4.5. *Nechť G je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ je parciálně spojitá a odděleně monotonní v proměnných x_i pro $i = 1, \dots, n - 1$. Potom je funkce f spojitá.*

Důkaz. Důkaz budeme provádět matematickou indukcí. Pro $n = 2$ je tvrzení obsaženo ve Větě 4.3.

Předpokládejme, že naše tvrzení platí pro $(n - 1)$ a budeme dokazovat, že platí i pro n. Zaveďme označení $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, y = x_n \in \mathbb{R}$. Jelikož f je parciálně spojitá, je při pevně zvoleném y funkce

$$f^y(\vec{x}) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$$

také parciálně spojitá. Navíc díky monotonii funkce f je i $f^y(\vec{x})$ monotonní v x_i, $i = 1, \dots, n - 1$. Tedy díky indukčnímu předpokladu je funkce f^y spojitá.
Zvolme $(\vec{x}_0, y_0) \in G$ a $\varepsilon > 0$.

Ze spojitosti f^y najdeme $\delta_0 > 0$ takové, že $\overline{P^{n-1}_{\delta_0}(\vec{x}_0)} \times \{y_0\} \subset G$ a

$$\text{pro všechny } \vec{x} \in \overline{P^{n-1}_\delta(\vec{x}_0)} \text{ platí } |f(\vec{x}, y_0) - f(\vec{x}_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Množinu všech $(n - 1)$-tic -1 a 1 označme

$$A = \big\{a \in \mathbb{R}^{n-1};\ a_i \in \{-1, 1\},\ i = 1, \dots, n - 1\big\}.$$

Těchto $(n-1)$-tic je 2^{n-1}. Pro pevné $a \in A$ najdeme z parciální spojitosti funkce f v proměnné y $\eta_a > 0$ takové, že $P^{n-1}_{\delta_0}(\vec{x}_0) \times P_{\eta_a}(y_0) \subset G$ a pro všechny $y \in P_{\eta_a}(y_0)$ platí

$$\big|f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, \dots, (\vec{x}_0)_{n-1} + a_{n-1}\delta, y\big) - f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, \dots, (\vec{x}_0)_{n-1} + a_{n-1}\delta, y_0\big)\big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Zvolme $\tilde{\delta_0}$ splňující $0 < \tilde{\delta_0} < \delta$ a $\tilde{\delta_0} < \eta_a$ pro všechny $a \in A$. Volme pevné

$$(\vec{x}, y) \in P^n_{\tilde{\delta_0}}\big((\vec{x}_0, y_0)\big).$$

Z monotonie f v x_1 je funkce $g(x_1) = f(x_1, \dots, x_n, y)$ buď neklesající, pak

$$f(\vec{x}, y) \leq f\big((\vec{x}_0)_1 + \delta, x_2, \dots, y\big) \text{ a volme } a_1 := +1,$$

nebo nerostoucí, pak

$$f(\vec{x}, y) \leq f\big((\vec{x}_0)_1 - \delta, x_2, \dots, y\big) \text{ a volme } a_1 := -1.$$

V druhém kroku odhadneme $f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, x_2, \dots, y\big)$. Z monotonie f v x_2 získáme analogicky jako v předešlém kroku, že buď

$$f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, x_2, \dots, y) \leq f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, (\vec{x}_0)_2 + \delta, x_3, \dots, y\big) \text{ a volme } a_2 := +1$$

nebo

$$f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, x_2, \dots, y) \leq f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, (\vec{x}_0)_2 - \delta, x_3, \dots, y\big) \text{ a volme } a_2 := -1.$$

Tímto postupem dostaneme v $(n-1)$. kroku, že

$$f(\vec{x}, y) \leq f\big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, \dots, (\vec{x}_0)_{n-1} + a_{n-1}\delta, y\big) \tag{4.3}$$

pro nějakou $(n-1)$-tici $(a_i)_{i=1}^{n-1} \in A$. Označme

$$\vec{x}_1 = \big((\vec{x}_0)_1 + a_1\delta, \dots, (\vec{x}_0)_{n-1} + a_{n-1}\delta\big).$$

Za použití (4.3) můžeme odhadovat

$$f(\vec{x}, y) - f(\vec{x}_0, y_0) \leq \big(f(\vec{x}_1, y) - f(\vec{x}_1, y_0)\big) + \big(f(\vec{x}_1, y_0) - f(\vec{x}_0, y_0)\big) < \varepsilon,$$

kde první závorku na pravé straně jsme odhadli díky nerovnosti (4.2) a druhou díky nerovnosti (4.1). Podobně lze najít $\tilde{\delta_1} > 0$ takové, že pro každé $(\vec{x}, y) \in P^n_{\tilde{\delta_1}}\big((\vec{x}_0, y_0)\big)$ je

$$f(\vec{x}, y) - f(\vec{x}_0, y_0) > -\varepsilon.$$

Položme $\tilde{\delta} = \min(\tilde{\delta_0}, \tilde{\delta_1})$. Konečně odtud se již snadno ukáže, že

$$\text{pro libovolné } (\vec{x}, y) \in P^n_{\tilde{\delta}}\big((\vec{x}_0, y_0)\big) \text{ je } |f(\vec{x}, y) - f(\vec{x}_0, y)| < \varepsilon.$$

$\square$

KAPITOLA 5

Vlastnosti množiny bodů nespojitosti parciálně spojité funkce

Definice 5.1. Nechť $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Potom množinu A nazveme *hustou* v B, jestliže

$$\overline{A} \supset B.$$

Řekneme, že množina $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ je *řídká* v B, pokud

$$B \setminus \overline{A} \text{ je hustá v } B.$$

O množině $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že je 1. kategorie v B, je-li A sjednocením spočetně mnoha řídkých množin v B.

V této kapitole dokážeme, že množina bodů nespojitosti parciálně spojité funkce v rovině je podmnožinou součinu množin 1. kategorie. Idea důkazu klíčové Věty 5.3 je obsažena v mnohem obecnější větě v obecnějších prostorech (viz [**1**, strany 235–238]).

Věta 5.2 (Baire). *Nechť P je úplný metrický prostor a nechť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jeho uzavřených podmnožin splňující $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = P$. Potom*

$$\textit{existuje } n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tak, že } \big(F_{n_0}\big)^0 \neq \emptyset.$$

Důkaz. Viz [**3**, Věta 4.1]. □

Poznámka. *Nechť K je kompaktní prostor. Potom symbolem $C[K]$ míníme Banachův prostor spojitých funkcí na kompaktu K s maximovou normou*

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Věta 5.3. *Nechť je funkce $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ parciálně spojitá. Potom existuje množina D 1. kategorie v $I = [0,1]$ taková, že*

$$\textit{v každém bodě } (I \setminus D) \times I \textit{ je funkce } f \textit{ spojitá.}$$

Důkaz. Označme první proměnou x a druhou y, dále označme $K(x,r)$ uzavřený interval $[x-r, x+r]$. Definujme $f^x(y) = f(x,y)$ a zobrazení Φ, které prvku x přiřadí funkci f^x. Všimněme si, že díky parciální spojitosti funkce f je Φ zobrazení z I do Banachova prostoru $C[I]$.

Důkaz rozdělíme do 4 kroků.

(1) Vyjádříme interval $[a,b]$ jako sjednocení uzavřených množin a užijeme Bairovu větu.
(2) Dokážeme, že množina bodů spojitosti zobrazení Φ je hustá v I.
(3) Ukážeme, že množina bodů nespojitosti zobrazení Φ je 1. kategorie v I.
(4) Ukážeme, že f je spojitá v bodech množiny $(I \setminus D) \times I$, kde D je množina z (3).

(1) Zvolme $\varepsilon > 0$ a interval $[a, b]$ takový, že $0 \leq a < b \leq 1$. Víme, že $C[I]$ je separabilní Banachův prostor (neboť polynomy s racionálními koeficienty jsou husté, viz [**3**, Stone-Weierstrassova věta D.2]). Uspořádejme spočetnou hustou podmnožinu $C[I]$ do posloupnosti $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$. Označme

$$P_i = \{x \in [a, b] : \|f^x - p_i\| \leq \varepsilon\}.$$

Díky hustotě $\{p_i; i \in \mathbb{N}\}$ v $C[I]$ platí

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i.$$

Pro užití Bairovy věty musíme ukázat, že množiny P_i jsou uzavřené. Pro $t \in I$ definujme $\chi_t \in (C[I])^*$ předpisem $\chi_t(h) = h(t)$ pro $h \in C[I]$. Ukážeme, že

$$P_i = \{x \in [a, b] : \sup_{t\in I} |\chi_t(f^x) - \chi_t(p_i)| \leq \varepsilon\} = \bigcap_{t\in I} \{x \in [a, b] : |\chi_t(f^x) - \chi_t(p_i)| \leq \varepsilon\}.$$

První rovnost platí, jelikož

$$\|h\| = \sup_{t\in I} |h(t)| = \sup_{t\in I} |\chi_t h|.$$

Druhá rovnost platí díky vlastnosti suprema

$$\sup M \leq r \Leftrightarrow \text{ pro každé } m \in M \text{ platí } m \leq r.$$

Jelikož pro každé pevné $t \in [0, 1]$ jsou funkce $\chi_t \circ \Phi(x) = \chi_t(f^x) = f(x, t)$ spojité, je i funkce $\Psi(x) = |\chi_t(f^x) - \chi_t(p_i)|$ spojitá. Protože množina

$$\{x \in [a, b] : |\chi_t(f^x) - \chi_t(p_i)| \leq \varepsilon\} = \Psi^{-1}([0, \varepsilon]),$$

lze ji psát jako vzor uzavřené množiny $[0, \varepsilon]$ při spojitém zobrazení Ψ, tudíž je uzavřená. Proto je množina P_i průnikem uzavřených množin, tedy také uzavřená. Proto už můžeme využít Bairovu větu. Její aplikací získáváme existenci $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že P_{n_0} má neprázdný vnitřek. Tudíž

$$\text{existuje } x_0 \in [a, b] \text{ a } r_0 > 0 \text{ splňující } K(x_0, r_0) \subset P_{n_0} \subset [a, b].$$

Jsou-li body $x, \tilde{x} \in K(x_0, r_0) \subset P_{n_0}$, potom díky definici množiny P_{n_0} platí

$$\|f^x - f^{\tilde{x}}\| \leq \|f^x - p_{n_0}\| + \|p_{n_0} - f^{\tilde{x}}\| \leq 2\varepsilon.$$

Tuto konstrukci aplikujeme nejdříve s $\varepsilon_0 = 1$ a získáme interval $K(x_0, r_0)$.

(2) Opakováním postupu s $\varepsilon_1 = 1$ a intervalem $K(x_0, \frac{r_0}{2})$, získáme existenci čísel $x_1, r_1 > 0$ splňujících $K(x_1, r_1) \subset K(x_0, \frac{r_0}{2})$ a pro všechna $x, \tilde{x} \in K(x_1, r_1)$ platí

$$\|f^x - f^{\tilde{x}}\| \leq 2.$$

V n-tém kroku opakováním postupu s $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ a intervalem $K(x_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2})$, získáme existenci čísel $x_n, r_n > 0$ splňujících $K(x_n, r_n) \subset K(x_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2})$ a pro všechna $x, \tilde{x} \in K(x_n, r_n)$ platí

$$\|f^x - f^{\tilde{x}}\| \leq \frac{2}{n}.$$

Takto jsme získali posloupnost uzavřených intervalů, pro které platí

$$K(x_1, r_1) \supset K(x_2, r_2) \supset K(x_3, r_3) \supset \dots$$

a $0 < r_n \leq \frac{1}{2} r_{n-1}$. Tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K(x_n, r_n) = \lim_{n\to\infty} 2\, r_n = 0.$$

Proto existuje
$$z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K(x_n, r_n).$$
Jestliže $|x - z| < r_{n+1}$, pak platí
$$|x - x_n| \leq |x - z| + |z - x_n| \leq r_{n+1} + \frac{r_n}{2} \leq r_n.$$
Kde $|z - x_n|$ jsme odhadli díky tomu, že $z \in K(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset K(x_n, \frac{r_n}{2})$. Proto platí
$$\text{pro každé } x \in P_{r_{n+1}}(z) \text{ je } \|f^x - f^z\| \leq \frac{2}{n}.$$
Tedy je zobrazení Φ spojité v z.

Celkově získáváme, že pro každý netriviální interval $[a, b] \subset I$ existuje bod $z \in (a, b)$, ve kterém je Φ spojité. Proto je množina bodů, ve kterých je zobrazení Φ spojité, hustá v $[0, 1]$. Označme ji S.

(3) Nechť D je množina bodů nespojitosti. Označme
$$Q_n = \Big\{x \in [0,1] : \text{pro každé } r > 0 \text{ existují } s_1, s_2 \in K(x, r) \cap I$$
$$\text{takové, že } \|f^{s_1} - f^{s_2}\| \geq \frac{1}{n}\Big\}.$$
Potom $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$. Ukážeme uzavřenost Q_i pro všechny $i \in \mathbb{N}$. Konverguje-li posloupnost $x_n \in Q_i$ k x, potom pro každé $r > 0$ existuje $x_{n_0} \in K(x, r) \cap I$ takové, že $K(x_{n_0}, \frac{r}{2}) \subset K(x, r)$. Z definice Q_{n_0} existují $s_1, s_2 \in K(x_{n_0}, \frac{r}{2}) \subset K(x, r)$, pro které platí
$$\|f^{s_1} - f^{s_2}\| \geq \frac{1}{n}.$$
Proto je Q_n uzavřená množina.

Pro každé přirozené n je uzavřená množina Q_n podmnožinou doplňku množiny S, což je hustá množina v $[0, 1]$, proto je Q_n řídká. (Kdyby nebyla, obsahovala by nějaký interval $[c, d]$ pro $0 \leq c < d \leq 1$, který by nemohl obsahovat žádný bod S, což by byl spor s hustotou S.)

Proto pro množinu bodů nespojitosti D zobrazení Φ platí
$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, \text{ kde } Q_n \text{ jsou řídké.}$$
Tedy D je 1. kategorie.

(4) Zobrazení Φ je v bodech $I \setminus D$ spojité, proto platí, že pro každé $x_0 \in I \setminus D$ a pro všechny $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující
$$\text{je-li } |x - x_0| < \delta \text{ potom } \|f^x - f^{x_0}\| \leq \varepsilon.$$
Což je ekvivalentní s
$$\text{pro každé } y \in [0,1] \text{ je } |f(x, y) - f(x_0, y)| \leq \varepsilon.$$
Zvolme $(x_0, y_0) \in (I \setminus D) \times I$ a $\varepsilon > 0$.

Z parciální spojitosti funkce f je funkce $f(x_0, .)$ spojitá, tedy lze nalézt $\delta_1 > 0$ takové, že
$$\text{pro všechny } y \in P_{\delta_1}(y_0) \text{ je } |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ze spojitosti Φ v x_0 najdeme $\delta_2 > 0$, které nezávisí na y, takové, že

$$\text{pro každé } x \in P_{\delta_2}(x_0) \text{ platí } |f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom je-li $(x,y) \in P^2_\delta\big((x_0,y_0)\big)$ pak

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \le |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy funkce f je spojitá ve všech bodech množiny $(I \setminus D) \times I$. Proto je množina bodů nespojitosti funkce f podmnožinou $D \times I$. □

Důsledek 5.4. *Označme $I = [0,1]$. Nechť je funkce $f : I^2 \to \mathbb{R}$ parciálně spojitá. Potom existují množiny D_1, D_2 1. kategorie v I takové, že množina bodů nespojitosti funkce f je podmnožinou $D_1 \times D_2$.*

Důkaz. Označme D množinu nespojitosti funkce f. Aplikací Věty 5.3 dostaneme existenci množiny D_1 1. kategorie v I takové, že

$$\text{v každém bodě } (I \setminus D_1) \times I \text{ je funkce } f \text{ spojitá.}$$

Proto je množina D podmnožinou $D_1 \times I$. Opětovnou aplikací Věty 5.3 na funkci $g(x,y) = f(y,x)$ (vyměníme první a druhou proměnnou) získáme existenci množiny D_2 1. kategorie v I takové, že množina bodů nespojitosti funkce g je podmnožinou $D_2 \times I$. Proto $D \subset I \times D_2$. Tudíž

$$D \subset (D_1 \times I) \cap (I \times D_2) = D_1 \times D_2.$$

□

Důsledek 5.5. *Nechť je $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ parciálně spojitá. Potom existují množiny D_1, D_2 1. kategorie v $\mathbb{R}$ takové, že množina bodů nespojitosti funkce f je podmnožinou $D_1 \times D_2$.*

Důkaz. Množinu G lze psát jako sjednocení kompaktních množin

$$K_n = \Big\{x \in \overline{P^2_n(0)} \cap G : \operatorname{dist}(x, \partial G) \ge \frac{1}{n}\Big\}.$$

Kompakt K_n pokryjeme otevřenými množinami

$$K_n \subset \bigcup_{x \in K_n} P^2_{\delta_x}(x),$$

kde $\delta_x > 0$ je dost malé, aby $\overline{P^2_{\delta_x}(x)} \subset G$. Z pokrytí K_n lze najít konečné podpokrytí

$$K_n \subset \bigcup_{l=1}^{k_n} P^2_{\delta_{x^n_l}}(x^n_l).$$

Pro $f|_{\overline{P^2_{\delta_{x^n_l}}}} : \overline{P^2_{\delta_{x^n_l}}} \to \mathbb{R}$ aplikujeme analogii Důsledku 5.4. Získáváme existenci množin $D_1^{n,l}$, $D_2^{n,l}$ 1. kategorie takových, že množina bodů nespojitosti $f|_{\overline{P^2_{\delta_{x^n_l}}}}$ je podmnožinou $D_1^{n,l} \times D_2^{n,l}$. Proto je množina bodů nespojitosti f podmnožinou

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{k_n} D_1^{n,l}\Big) \times \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{k_n} D_2^{n,l}\Big),$$

kde obě strany součinu jsou 1. kategorie, neboť jsou spočetným sjednocením množin 1. kategorie. □

Literatura

[1] Alexejewicz: *Analiza funkcionalna*, PWN, 1969.
[2] V. Jarník: *Diferenciální počet II*, Academia, 1984.
[3] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, 1998.
[4] J. Lukeš a kolektiv: *Problémy z matematické analýzy*, Praha, 1982.
[5] J. Lukeš a J. Malý: *Míra a integrál*, Praha, 1993.