Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Šimánek

Metoda konečných prvků pro řešení stlačitelného proudění

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce Prof. RNDr Miloslavu Feistauerovi za odborné vedení, Jaroslavě Prokopové za poskytnuté rady a rodičům za všestranou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Petr Šimánek

Obsah

Úvod **5**

1 Základní termodynamické vztahy **6**
1.1 Barotropní proudění, rychlost zvuku, Machovo číslo 6
1.2 Pohybové rovnice 7
1.2.1 Rovnice kontinuity 7
1.2.2 Navierovy-Stokesovy rovnice 8
1.3 Zjednodušující předpoklady 8

2 Proudová funkce **10**
2.1 Proudová funkce 10
2.2 Rovnice pro hustotu stlačitelného proudění 10

3 Formulace problému obtékání izolovaného profilu **14**
3.1 Profil 14
3.2 Diferenciální rovnice a okrajové podmínky 15
3.3 Žukovského profil 16

4 Numerické řešení **17**
4.1 Metoda konečných prvků 17
4.1.1 Formulace problému 17
4.1.2 Variační formulace 18
4.2 Diskretizace problému 19
4.2.1 Přibližné řešení 20
4.2.2 Řešení diskrétního problému 21
4.3 Nespojitá Galerkinova metoda 21
4.3.1 Spojitý problém 22
4.3.2 Diskrétní problém 22

5 Výsledky **25**

Literatura **29**

Název práce: Metoda konečných prvků pro řešení stlačitelného proudění
Autor: Petr Šimánek
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr. h. c.
e-mail vedoucího: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předkládaná práce se zabývá studiem obtékání izolovaného leteckého profilu. Jsou popsány rovnice popisující stlačitelné nevazké nevířivé stacionární rovinné subsonické proudění a je uveden popis problemu proudění pomocí rychlosti a pomocí proudové funkce. Hlavní náplní práce je studium metody konečných prvků a její srovnání s Galerkinovou nespojitou metodou. Metody jsou testovány na Žukovského profilu s ostrou odtohovou hranou. Důraz je kladen na okrajové podmínky, hlavně na ostrou odtokovou podmínku a její použití ve studovaných metodách.

Klíčová slova: nevazké, stlačitelné, subsonické, nevířivé, stacionární, rovinné proudění; metoda konečných prvků; Galerkinova nespojitá metoda; odtoková podmínka; proudová funkce

Title: Finite element solution of compressible flow.
Author: Petr Šimánek
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr. h. c.
Supervisor's e-mail address: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study problem of flow past an isolated airfoil. We describe the mathematical formulations of inviscid compressible irrotational stationary subsonic plane flow with aid of velocity and stream function. The problem is solved by finite element method and discontinuous Galerkin finite element method. We test these methods on Joukowskii airfoil with sharp trailing point. Special attention is paid to the trailing condition and its realization in the mentioned methods.

Keywords: irrotational, subsonic, inviscid, compressible, stationary, plane flow; stream function; trailing condition; finite element method; discontinuous Galerkin finite element method

Úvod

Řešení problému obtékání leteckého profilu tekutinou ja aktuální problém uplatňující se při návrhu tvaru leteckých křídel, lopatek turbín či vrtulí.

Používáme matematické modely popisující proudění tekutiny v okolí profilu. Tato práce je zaměřena především na proudění stlačitelné, nevazké, nevířivé, rovinné, subsonické. Je zde srovnán model založený na formulaci problému pomocí proudové funkce a jeho diskretizace pomocí konformních prvků s nespojitou Galerkinovou metodou. Důležitou roli při aplikaci metod hrají okrajové podmínky a odtoková podmínka. Odtoková podmínka musí být uvažována abychom získali řešení přípustné z fyzikálního pohledu.

Obě metody dávají při řešení tohoto problému podobné výsledky. Metody porovnáváme pomocí proudnic, izokřivek rychlosti a rozložení rychlosti podél profilu.Nespojitou Galerkinovu metodu je možné narozdíl od metody konečných prvků aplikovaných na proudovou funkci použít i na proudění transonické, vířivé a nestacionární.

K testování je použit Žukovského profil, který se sice v letectví v současné době nepoužívá, ale protože je možné určit analytické řešení obtékání tohoto profilu, je velmi vhodný k testování numerických metod. Obě metody jsou však použitelné prakticky pro jakýkoliv profil.

Nespojitá Galerkinova metoda je v současné době intenzivně rozvíjena na katedře numerické matematiky MFF UK.

Kapitola 1

Základní termodynamické vztahy

Budeme se zabývat řešením proudění nevazké stlačitelné tekutiny. Veličiny popisující toto proudění jsou rychlost $\mathbf{v}$, hustota ρ, tlak p, rychlost zvuku a a entropie S. Budeme předpokládat, že všechny veličiny jsou reprezentovány dostatečně hladkými funkcemi v $Q_T = \Omega \times (0, T)$, kde $T > 0$ je konstanta určující čas, po který proudění sledujeme a Ω je oblast vyplněná sledovanou tekutinou. K popisu proudění používáme rovnici kontinuity, Eulerovy pohybové rovnice a termodynamické vztahy (viz [3], [6]).

1.1 Barotropní proudění, rychlost zvuku, Machovo číslo

Proudění je barotropní, pokud může být tlak vyjádřen jako funkce hustoty:

$$p = f(\rho).$$

Tedy $p(x,t) = f(\rho(x,t))$ pro všechna $(x,t) \in Q_T$. Předpokládáme, že

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

a že existuje spojitá derivace

$$f' > 0 \quad \text{v}\,(0, +\infty).$$

Pro adiabatické barotropní proudění (kdy nedochází k výměně ani přenosu tepla) ideálního plynu lze dostat vztah

$$p = C\rho^{\gamma},$$

kde C je konstanta a $\gamma = c_p/c_v > 1$. Zde je c_p je měrná tepelná kapacita při stálém tlaku, c_v je měrná tepelná kapacita při stálém objemu.

V obecnějším modelu než je barotropní proudění uvažujeme tlak jako funkci hustoty a entropie: $p = f(\rho, S)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce splňující podmínku $\partial f/\partial\rho > 0$. Pro ideální plyn máme

$$p = C\rho^{\gamma} exp(S/c_v).$$

Pokud entropie S je konstantní v celém proudovém poli, mluvíme o **homoentropickém** proudění.

Rychlost zvuku a dále definujeme jako

$$a = \sqrt{\partial f/\partial\rho}$$

v jednotkách ms^{-1}. Další důležitou charakteristikou proudění kapalin je Machovo číslo.

$$M = \frac{|\mathbf{v}|}{a}.$$

Machovo číslo je bezrozměrná veličina. Říkáme, že proudění je subsonické, sonické nebo supersonické v bodě x a v čase t, pokud

$$M(x,t) < 1, M(x,t) = 1 \text{ nebo } M(x,t) > 1.$$

O Machově čísle má význam mluvit pouze v případě stlačitelného proudění.

1.2 Pohybové rovnice

1.2.1 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity je matematickým vyjádřením zákona zachování hmoty a lze ji psát ve tvaru

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \qquad (1.1)$$

kde ρ je hustota a $\mathbf{v}$ je vektor rychlosti.

1.2.2 Navierovy-Stokesovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice, které jsou matematickým vyjádřením zákona zachování hybnosti, je možné je vyjádřit takto:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho\, f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\right\} \quad (1.2)$$

pro $i = 1, 2, 3$ v Q_T, kde ρ je hustota, p je tlak, v_i jsou složky rychlosti, f_i jsou složky vektoru hustoty vnějších objemových sil ($\mathbf{f}$ reprezentuje např. gravitační sílu), t je čas, λ a μ jsou koeficienty vazkosti.

Koeficienty λ a μ jsou v praxi často brány jako konstanty splňující $3\lambda + 2\mu = 0$ pro $\mu > 0$. Koeficient μ se nazývá dynamická vazkost. Uvedené vztahy jsou odvozené např. v [3].

1.3 Zjednodušující předpoklady

Uvažujeme-li **nevazké proudění** (tedy je-li vazkost tak malá, že ji zanedbáváme), pokládáme v Navierových-Stokesových rovnicích (1.2) $\mu = \lambda = 0$. Po úpravě dostáváme Eulerovy pohybové rovnice:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad})\mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad \text{v } Q_T. \quad (1.3)$$

Protože hustota plynů je velmi malá, lze vnější objemové síly $\mathbf{f}$ obvykle zanedbávat. Proto budeme předpokládat, že $\mathbf{f} = 0$. Pokud dále všechny veličiny popisující proudění nezávisí čase t a platí $\partial/\partial t = 0$, mluvíme o **stacionárním proudění**. Rovnice kontinuity (1.1) má pak tvar

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.4)$$

Pokud je proudění barotropní, adiabatické a homoentropické, pak lze psát

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \quad \rho > 0, \quad (1.5)$$

$$a^2 = \gamma \left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = a_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (1.6)$$

kde veličiny s indexem nula odpovídají rychlosti $\mathbf{v} = 0$.
Položme $a_0 = \sqrt{\gamma p_0/\gamma_0}$ a definujme tlakovou funkci $P(\rho)$ vztahem

$$P(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}(\tau)}{\tau}\, d\tau = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} - 1\right]. \tag{1.7}$$

Protože platí $(1/\rho)\,\mathrm{grad}\, p = \mathrm{grad}\, P(\rho)$ a

$$(\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{v} = 1/2|\,\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v},$$

dostaneme pohybovou rovnici (1.3) ve tvaru

$$\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathrm{grad}\, H, \tag{1.8}$$

kde

$$H = P(\rho) + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2. \tag{1.9}$$

Dalším zjednodušením je uvažování pouze **nevířivého proudění**, tedy proudění takového, že malé objemy se pohybují translačně a deformují se, ale nerotují. Matematicky je to vyjádřeno podmínkou

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0 \quad \mathrm{v}\,\Omega. \tag{1.10}$$

Máme-li tedy nevířivé homoentropické proudění, pak (1.8) implikuje, že $\mathrm{grad}\, H = 0$ a tedy, že $H = \mathrm{konst}\,\mathrm{v}\,\Omega$. Z (1.7), (1.9) a z $H = \mathrm{konst}$ plyne rovnice pro hustotu ve tvaru

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2a_0^2}|\mathbf{v}|^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{1.11}$$

Tato rovnice je někdy nazývána Bernoulliova rovnice pro stlačitelné proudění. Pravá strana této rovnice dává smysl pouze pro $0 \leq |\mathbf{v}|^2 \leq \frac{2a_0^2}{\gamma-1}$.
Systém popisující nevířivé nevazké barotropní stlačitelné proudění nyní tvoří rovnice (1.4), (1.10) a (1.11).

Předpokládejme, že je možné zavést kartézské souřadnice x_1, x_2, x_3 tak, že všechny veličiny popisující proudění jsou funkcí x_1, x_2, proudění je tedy zkoumáno pouze na $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a že složka rychlosti ve směru osy x_3 je nulová. Pak mluvíme o **rovinném proudění**. Rovnice kontinuity a podmínka nevířivého proudění mají pro rovinné proudění tvar

$$\frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} = 0 \quad \mathrm{v}\,\Omega \tag{1.12}$$

a

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 \quad \mathrm{v}\,\Omega. \tag{1.13}$$

Kapitola 2

Proudová funkce

2.1 Proudová funkce

Uvažujme nevířivé rovinné proudění popsané rovnicemi (1.12) a (1.13). Na základě rovnice (1.12) zavedeme proudovou funkci u splňující podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \rho v_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\rho v_2 \quad \text{v}\, \Omega. \tag{2.1}$$

Pokud existuje proudová funkce $u \in C^2(\Omega)$, je rovnice (1.12) automaticky splněna. Pokud dosadíme podmínky (2.1) do rovnice (1.13), získáme rovnici pro proudovou funkci ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{v}\, \Omega. \tag{2.2}$$

Označíme-li $b = 1/\rho$, máme

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b\,(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{v}\, \Omega. \tag{2.3}$$

2.2 Rovnice pro hustotu stlačitelného proudění

Substitucí (2.1) do (1.11) získáme

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2a_0^2} \frac{1}{\rho^2} \, |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{2.4}$$

Toto je implicitní vyjádření hustoty ρ jako funkce proměnné $\eta = |\nabla u|^2$. Položíme-li

$$\sigma = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2, \quad \vartheta = \frac{\gamma - 1}{2a_0^2\rho_0^2}\eta, \quad \lambda = \frac{2}{\gamma - 1}, \tag{2.5}$$

dostáváme (2.4) ve tvaru

$$\sigma = \left(1 - \frac{\vartheta}{\sigma}\right)^\lambda \tag{2.6}$$

Lemma 2.2.1 *1) Rovnice (2.6) má řešení σ právě když*

$$0 \le \vartheta \le \vartheta_{kr} = \frac{1}{\lambda + 1}\left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^\lambda. \tag{2.7}$$

Pro $\vartheta = \vartheta_{kr}$ existuje právě jedno řešení

$$\sigma_{kr} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^\lambda. \tag{2.8}$$

Pokud $\vartheta \in (0, \vartheta_{kr})$, pak (2.6) má dvě různé řešení σ_1 a σ_2 splňující nerovnosti $0 < \sigma_1 < \sigma_{kr} < \sigma_2 < 1$. Pro $\vartheta = 0$ máme jedinné řešení $\sigma_2 = 1$.

2) Proudění je subsonické resp. supersonické rosp. sonické v bodě $x \in \Omega$, pokud se $\sigma(x)$ rovná řešením σ_1 resp. σ_2 resp. σ_{kr}.

3) Nechť $M^* \in (0, 1)$. Pak existuje $\sigma^* \in (\sigma_{kr}, 1)$ takové, že Machovo číslo M splňuje podmínku $0 \le M \le M^*$ právě když $\sigma^* \le \sigma \le 1$.

Důkaz. Tvrzení 1) snadno dostaneme ze závislosti ϑ na σ ve (2.6). Dále z (2.5), (2.6) a (1.6) dostaneme

$$M^2 = \frac{|\mathbf{v}|^2}{a^2} = \frac{|\nabla u|^2}{\rho^2}\frac{1}{a_0^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1} = \frac{|\nabla u|^2}{a_0^2\rho_0^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-2(1+1/\lambda)} = \lambda\vartheta\sigma^{-(1+1/\lambda)}$$

$$= \lambda(\sigma^{-1/\lambda} - 1).$$

Z tohoto důvodu platí

$$M = \sqrt{\lambda(\sigma^{-1/\lambda} - 1)},$$

z čehož snadno plynou tvrzení 2) a 3).

$\square$

Pokud je proudění subsonické v Ω, pak závislost kořene σ_2 rovnice (2.6) na ϑ definuje závislost hustoty na $|\nabla u|^2$. Protože řešení (2.6) je nejednoznačné, je nejednoznačné i řešení (2.4) a rovnice (2.2) není proto považována za vhodnou pro transonické proudění v Ω. V dalším se proto omezím pouze na striktně subsonické proudění v Ω, pro které

$$0 \le M \le M^* \quad \text{v}\,\Omega, \tag{2.9}$$

kde $M^* \in (0,1), M^* = \text{konst}$.

Lemma 2.2.2 *1) Funkce přiřazující $\vartheta \in [0, \vartheta_{kr}] \to \sigma(\vartheta) = \sigma_2$, kde $\sigma_2 \in [\sigma_{kr}, 1]$ je řešením rovnice (2.6), je třídy $C^\infty([0, \vartheta_{kr}])$. Dále $\sigma(0) = 1$, $\sigma(\vartheta_{kr}) = \sigma_{kr}$, $\sigma'(\vartheta) < 0$ pro $\vartheta \in (0, \vartheta_{kr})$ a $\sigma'(\vartheta_{kr}) = -\infty$.*

*2) Nechť $M^* \in (0,1)$, σ^* buď konstanta z lemmatu **2.2.1** a ϑ^* nechť splňuje podmínky $\sigma(\vartheta^*) = \sigma^*$, $\vartheta^* \in (0, \vartheta_{kr})$. Pak existuje funkce $\tilde{\sigma} : [0, +\infty) \to [\sigma_{kr}, 1]$ s následujícími vlastnostmi:*

a) $\tilde{\sigma}|\,[0, \vartheta^*] = \sigma|\,[0, \vartheta^*]$.
b) *Derivace $\tilde{\sigma}'$ je Lipschitzovsky spojitá v $[0, +\infty]$.*
c) $-\infty < \tilde{\sigma}'(\vartheta) \le 0 \quad \forall\, \vartheta \in [0, +\infty]$.
d) *Existuje $\tilde{\vartheta} \ge \vartheta_{kr}$ taková, že $\tilde{\sigma}'(\vartheta) = 0$ pro $\vartheta \ge \tilde{\vartheta}$.*

Důkaz.1) plyne z věty o implicitních funkcích.
2)Funkci $\tilde{\sigma}$ lze konstruovat například jako funkci splňující:

- $\tilde{\sigma} = \sigma, \quad \vartheta \in \; [0, \vartheta^*]$
- $\tilde{\sigma} = \sigma(\vartheta^*)\exp\left(\int_{\vartheta^*}^{\vartheta} g(t)\, dt\right), \;\; \vartheta \ge \vartheta^*$
- $g(t) = \sigma'(\vartheta^*)(t - \vartheta_{kr}), \quad t \in [\vartheta^*, \vartheta_{kr}]$
- $g(t) = 0, \quad t \ge \vartheta_{kr}$

$\square$

Položíme-li

$$b(\eta) = \rho_0^{-1}\left[\tilde{\sigma}\left(\frac{\gamma - 1}{2a_0^2\rho_0^2}\eta\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \eta \ge 0, \tag{2.10}$$

a substituujeme-li $b := b(|\nabla u|^2)$ do (2.3), dostaneme rovnici popisující striktně subsonické stlačitelné nevířivé proudění s Machovým číslem $M \leq M^* < 1$. Tento výsledek je formulován v následujícím lemmatu.

Lemma 2.2.3 *1) Nechť funkce $v_1, v_2, \rho \in C^1(\Omega)$ tvoří řešení systému (1.11), (1.12) a (1.13) v Ω a definuje proudění s Machovým číslem $M \in [0, M^*]$, kde $M^* \in (0,1)$. Nechť u je proudová funkce splňující (2.1). Potom u je řešením rovnice (2.3), kde $b = b\left(|\nabla u|^2\right)$ je dáno v (2.10). Navíc*

$$\vartheta = \frac{\gamma - 1}{2a_0^2\rho_0^2}|\nabla u| \leq \vartheta^* \quad \mathrm{v}\Omega, \tag{2.11}$$

s ϑ^* z lemmatu (2.2.2).
2) Nechť $u \in C^2(\Omega)$ je řešení (2.3) s b z (2.10). Potom

$$\begin{aligned} \rho &= b^{-1}(|\nabla u|^2), \\ v_1 &= \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial u}{\partial x_2}, \\ v_2 &= -\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial u}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{2.12}$$

jsou prvky prostoru $C^1(\Omega)$ a splňují (1.12) a (1.13). Pokud je navíc splněna podmínka (2.11), platí i (1.11) a funkce ρ, v_1, v_2 definují subsonické proudění v Ω s Machovým číslem $M \leq M^*$.

Důkaz. Lemma je důsledkem lemmat (2.2.1), (2.2.2) a identit (2.1) a (2.5).

Kapitola 3

Formulace problému obtékání izolovaného profilu

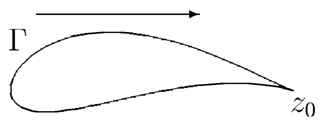
3.1 Profil

Definice 3.1.1

- ***Křivkou*** *v* Ω *nazveme spojité zobrazení* $\varphi : [a,b] \to \Omega$*, kde* $[a,b]$ *je uzavřený omezený interval.*
- *Křivka* $\varphi : [a,b] \to \Omega$ *je **hladká**, pokud existuje* $\varphi'(t) \neq 0$ *pro všechny* t *z* $[a,b]$.
- *Křivka* $\varphi : [a,b] \to \Omega$ *je **po částech hladká**, pokud existuje dělení* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b,\ k \in \mathbb{N}$ *tak, že* $\varphi|\,[a_{i-1}, a_i]$ *je hladká pro všechny* $i = 1, \ldots, k$.
- *Křivka* $\varphi : [a,b] \to \Omega$ *je **uzavřená**, pokud* $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- *Uzavřená křivka* $\varphi : [a,b] \to \Omega$ *je **jednoduchá**, pokud* $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ *pro* $\forall\, t_1, t_2 \in [a,b), t_1 \neq t_2$.

Definice 3.1.2 ***Profilem*** Γ *nazveme geometrický obraz uzavřené, jednoduché, záporně orietované křivky v* $\mathbb{R}^2$ *, která je hladká s výjimkou nejvýše jednoho bodu.*

V praktických aplikacích se předpokládá, že bod z_0, ve kterém není křivka hladká, se nachází na odtokové hraně profilu vzhledem k proudící tekutině.

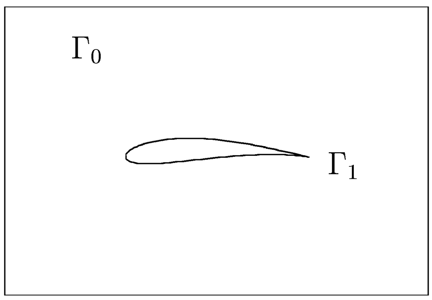


Obr 3.1.2

3.2 Diferenciální rovnice a okrajové podmínky

V této části uvažujeme pouze rovinné, nevazké, stacionární, nevířivé, subsonické, stlačitelné proudění, které je popsáno rovnicí (2.2) (popřípadě rovnicí (2.3) a okrajovými podmínkami.

Předpokládáme, že Ω je oblast s hranicí $\partial\Omega$ skládající se ze dvou disjunktních jednoduchých uzavřených křivek Γ_0 (vnější komponenta) a Γ_1 (vnitřní komponenta - profil) viz obrázek 3.2.1.



Obrázek 3.2.1

Na $\partial\Omega$ předepíšeme obrajové podmínky. Na vnější části Γ_0 je vhodné uvažovat smíšené Dirichlet-Neumannovy podmínky:

$$u|\,\Gamma_D = u_D, \quad b\frac{\partial u}{\partial n}|\,\Gamma_N = -\Phi_N. \tag{3.1}$$

$\partial/\partial n$ označuje derivaci podle vnější normály k $\partial\Omega$, u_D a Φ_N jsou dané funkce, $\Gamma_0 = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ a $\Gamma_D \cap \Gamma = \emptyset$. Předpokládáme, že profil Γ_1 je nepropustný. Poté je na profilu proudová funkce u rovná předem neznámé konstantě q_1

$$u|\,\Gamma_1 = q_1. \tag{3.2}$$

K určení této konstanty je třeba uvažovat vhodné doplňující podmínky. V případě, že neznáme rychlost proudění okolo profilu, je nutné vybrat q_1 tak, aby výsledné řešení bylo fyzikálně přípustné, tedy aby byla splněna Kuttova-Žukovského podmínka ([3], paragraf 2.2.70 a [5]). Pokud je profil Γ_1 hladká křivka, uvažujeme podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial n}(z) = 0,$$

kde z je daný odtokový bod. Pokud je profil hladký až na jeden bod z_0 (viz obrazek 3.1.2), musíme q_1 vybrat tak, aby $|\nabla u|^2$ byla omezená v okolí Γ_1.

3.3 Žukovského profil

Žukovského funkce je funkce

$$Z(\vartheta) = \frac{1}{2}\left(\vartheta \frac{a^2}{\vartheta}\right), \tag{3.3}$$

kde $\vartheta \in S$ ($S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$), $a \in (0, \infty)$. Funkce Z je racionální a holomorfní v $\mathbb{C} - \{0\}$. Body 0 a ∞ jsou jednoduché póly Žukovského fukce. Z má následující vlastnosti:

- $Z(S) = S,\ Z(\vartheta_1) = Z(\vartheta_2)$ pouze když $\vartheta_1 = \vartheta_2$ nebo $\vartheta_1 = a^2/\vartheta_2$.
- Fuknce Z je prostá na množině $M \subset Z$, která neobsahuje žádnou z dvojic $\vartheta_1 = \vartheta_2$ a $\vartheta_1 = a^2/\vartheta_2$. Je-li množina M otevřená je $Z|M$ konformní zobrazení.

Žukovského funkce se používá ke konstrukci Žukovského profilu. Mějme kruh $K(h, a)$ se středem ih a procházející body $-a,\ a$, kde $h \in [0, \infty]$. Dále nechť kruh M se dotýká kruhu K v bodě a a splňuje $\overline{\mathrm{Int}K(h, a)} \subset \mathrm{Int}M \cup \{a\}$. Množinu $Z(M)$ nazýváme Žukovského profil. Žukovského profil je obrazem jednoduché uzavřené křivky a je závilsý na parametrech $h,\ a$ a na vzdálenosti středů kruhů K a M.

Žukovského profil se již v letectví pro konstrukci křídel nepoužívá. Kvůli možnosti získat pro Žukovského profil přesné řešení (metodou funkcí komplexní proměnné) se tento profil používá pro testování numerických metod.

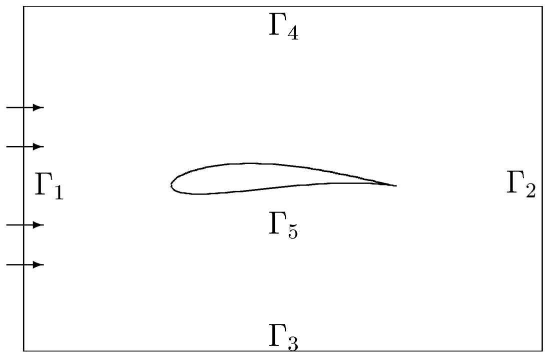
Kapitola 4

Numerické řešení

4.1 Metoda konečných prvků

4.1.1 Formulace problému

Klasické řešení problému obtékání profilu je definováno jako funkce $u \in C^2(\Omega)$ a konstanta q_1 splňující (2.3), (3.1) a odtokovou podmínku.



Uvažujme $\partial\Omega$ rozdělenou stejně jako na obrázku. Na Γ_1, Γ_3 a Γ_4 uvažujeme Dirichletovu okrajovou podmínku $u|\,\Gamma_i = u_i$, $i = 1, 3, 4$. Na Γ_2 uvažujme Neumannovu okrajovou podmínku $b\frac{\partial u}{\partial n}|\,\Gamma_2 = -\Phi_N$. Na Γ_5 máme podmínku $u|\,\Gamma_5 = q_1$. Označme $\Gamma_D = \bigcup\limits_{i=1,3,4} \Gamma_i$.

4.1.2 Variační formulace

Rovnici (2.3) můžeme psát ve tvaru

$$\operatorname{div}(b(|\nabla u|^2)\,\nabla u) = 0. \tag{4.1}$$

Definujeme prostor testovacích funkcí

$$V = \left\{\varphi \in C^1(\bar{\Omega}); \varphi|\Gamma_D = 0, \varphi|\Gamma_5 = 0\right\}. \tag{4.2}$$

Rovnici (4.1) nyní vynásobíme libovolnou funkcí $\varphi \in V$, zintegrujeme přes Ω a použijeme Greenovu větu:

$$0 = \int\limits_\Omega \operatorname{div}\left(b\left(|\nabla u|^2\right)\right)\nabla u = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\,\mathrm{d}x =$$

$$-\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 b\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^2 b\frac{\partial u}{\partial x_i} n_i \varphi\,\mathrm{d}S. \tag{4.3}$$

Protože

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i = \frac{\partial u}{\partial n}$$

a

$$b\frac{\partial u}{\partial n}|\,\Gamma_2 = -\Phi_N,$$

dostáváme

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 b\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int\limits_{\Gamma_2} \Phi_N \varphi\,\mathrm{d}S, \tag{4.4}$$

tedy

$$\int\limits_\Omega b(|\nabla u|^2)\,\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int\limits_{\Gamma_2} \Phi_N \varphi\,\mathrm{d}S, \quad \forall\,\varphi \in \Omega. \tag{4.5}$$

Definujme nyní fukcionály

$$a(u,\varphi) = \int\limits_\Omega b\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u \cdot \nabla\varphi\mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

$$L(\varphi) = \int\limits_{\Gamma_2} \Phi_N \varphi\,\mathrm{d}S. \tag{4.7}$$

Rovnici (4.5) můžeme psát ve tvaru

$$a(u,\varphi) = L(\varphi)\forall\varphi \in V. \tag{4.8}$$

Zaveďme fukncí $u^* \in C^2(\overline{\Omega})$ s těmito vlastnostmi:

$$u^*|\Gamma_D = u_D \tag{4.9}$$

$$u^*|\Gamma_5 = 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \bar{n}}(z_0) = 0, \tag{4.11}$$

kde $\partial/\partial\bar{n}$ je derivace ve směru osy α v bodě z_0, a prostor

$$\tilde{V} = \left\{\varphi \in C^2(\overline{\Omega}); \varphi|\Gamma_D = 0, \varphi|\Gamma_5 = \text{konst}, \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{n}}(z_0) = 0\right\}. \tag{4.12}$$

Vidíme, že $u - u^* \in \tilde{V}$ a tedy $u = u^* + v$, kde $v \in \tilde{V}$.

Z předchozího vidíme, že je-li u klasické řešení problému definovaného v 4.1.1, splňuje též podmínky

$$u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{4.13}$$

$$u - u^* \in \tilde{V}, \tag{4.14}$$

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \quad \forall\,\varphi \in V, \tag{4.15}$$

Naším cílem bude řešit tento problém metodou konečných prvků.

4.2 Diskretizace problému

Oblast Ω aproximujme pomocí oblasti Ω_h s po částech lineární hranicí $\partial\Omega_h$, kde vrcholy (body dělení z definice (3.11)) leží na hranici $\partial\Omega$. Části aproximované hranice značíme $\Gamma_D \approx \Gamma_{Dh}$, $\Gamma_5 \approx \Gamma_{5h}$ a $\Gamma_2 \approx \Gamma_{2h}$. Vytvoříme triangulaci $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω_h. $\mathcal{T}_h$ se zkládá z konečného počtu uzavřených trojúhelníků T s následujícími vlastnostmi (viz [6], paragraf 4.1. nebo [5]):

- $\overline{\Omega}_h = \bigcup\limits_{T \in \mathcal{T}} T$,
- jestliže $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$, $T_1 \neq T_2$, pak buď $T_1 \cap T_2 \neq 0$ nebo $T_1 \cap T_2$ je společný vrchol trojúhelníků T_1, T_2 nebo $T_1 \cap T_2$ je společná hrana těchto trojúhelníků.

Označme $\sigma_h = \{P_1, \dots, P_N\}$ množinu všech vrcholů v $\mathcal{T}_h$. Předpokládáme že σ_h má tyto vlastnosti:

- $\sigma_h \subset \overline{\Omega}_h$, $\sigma_h \cap \partial\Omega_h \subset \partial\Omega$,
- průsečíky částí hranice Ω s různými okrajovými podmínkami jsou prvky σ_h,
- body, v nichž není hranice Ω hladká, jsou prvky σ_h,
- bod z_0 ležící na ostré odtokové hraně profilu je prvkem σ_h a existuje trojúhelník T s vrcholy $P_a = z_0$, $P_b \in \sigma_h$ takový, že strana $S = P_aP_b \in \partial T$ má směr osy α v bodě z_0.

Přibližné řešení problému bude hledáno v prostoru konformních lineárních prvků

$$X_h = \left\{\varphi_h \in C(\overline{\Omega})_h;\ \varphi_h|T \text{ je lineární } \forall\, T \in \mathcal{T}_h, \right\} \tag{4.16}$$

a prostor V testovacích funkcí (4.2) budeme aproximovat pomocí

$$V_h = \{\varphi_h \in X_h; \varphi_h|\Gamma_{Dh} = 0, \varphi_h|\Gamma_{5h} = 0\}\,. \tag{4.17}$$

Prostor $\tilde{V}$ definovaný v (4.12) aproximujeme

$$\tilde{V}_h = \{\varphi_h \in X_h; \varphi_h|\Gamma_{Dh} = 0, \varphi_h|\Gamma_{5h} = \text{konst}, \varphi_h(z_0) = \varphi_h(P_b)\}\,. \tag{4.18}$$

Zaveďme fuknci $u_h^* \in X_h$ s těmito vlastnostmi:

$$u_h^*(P) = u_D(P) \quad \forall\, P \in \sigma_h, \tag{4.19}$$

$$u_h^*|\Gamma_{5h} = 0, \tag{4.20}$$

$$u(P_b) = 0. \tag{4.21}$$

4.2.1 Přibližné řešení

Hledáme přibližné řešení $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}^1$ splňující

$$u_h \in X_h, \tag{4.22}$$

$$u_h - u_h^* \in \tilde{V}_h, \tag{4.23}$$

$$a_h(u_h, \varphi_h) = L_h(\varphi_h) \quad \forall\, \varphi_h \in V_h. \tag{4.24}$$

Funkcionály (4.6), (4.7) mají své diskrétní tvary

$$a_h(u_h, \varphi_h) = \int\limits_{\Omega_h} b\left(|\nabla u_h|^2\right) \nabla u_h \nabla \varphi_h, \tag{4.25}$$

$$L_h(\varphi_h) = \int\limits_{\Gamma_{2h}} \Phi_{Nh} \varphi_h \, \mathrm{dS}, \tag{4.26}$$

Kde Φ_{Nh} je aproximace funkce Φ_N.

4.2.2 Řešení diskrétního problému

V prostoru X_h existuje baze $\{\omega\}_{i=1}^N$ splňující

$$\omega_i(P_j) = \delta_{ij}, \ i, j = 1, \ldots, N.$$

Jestliže $\varphi_h \in X_h$, pak

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^{n} \varphi_h(P_i)\, \omega_i. \tag{4.27}$$

V prostoru V_h existuje baze $\{\omega^*\}_{i=1}^n$, kde jsou $\omega_i^* \in X_h$ přiřazeny vrcholům $P_i \in \sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_{2h})$, tedy n je počet prvků množiny $\sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_{2h})$.

Na prostoru $\tilde{V}_h$ definujeme bazi $\{\tilde{\omega}^*\}_{i=1}^n$ $P_i \in \sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_{2h} \cup \Gamma_{5h})$, pro kterou platí

a) $\tilde{\omega}_i^* = \omega_i^*$ pro $i = 1, \ldots, n$ takové, že $P_i \in \sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_{2h} \cup \Gamma_{5h})$

b) $\tilde{\omega}_i^* = \sum_{P_i \in \sigma_h \cap (\{P_a\} \cup \Gamma_{5h})}$ pro $P_i = P_a$.

Přibližné řešení lze zapsat ve tvaru $u_h = u_h^* + w_h, \ w_h \in \tilde{V}_h$, kde funkce w_h můžeme zapsat ve tvaru $w_h = \sum_{i=1}^n w_h \tilde{\omega}_i^*$. Dostáváme tak vyjádření přibližného řešení ve tvaru

$$u_h = u_h^* + \sum_{i=1}^{n} w_h \tilde{\omega}_i^*.$$

4.3 Nespojitá Galerkinova metoda

Metodu konečných prvků pro stlačitelné proudění budeme srovnávat s nespojitou Galerkinovou metodou popsanou např. v [1], [2], [7]:

4.3.1 Spojitý problém

Eulerovy rovnice popisující rovinné nevazké proudění mohou být psány ve tvaru ([6])

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0 \quad \text{v } Q_T = \Omega \times (0, T), \tag{4.28}$$

kde

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_4)^{\mathrm{T}} = (\rho,\, \rho v_1,\, \rho v_2,\, E)^{\mathrm{T}} \tag{4.29}$$

je takzvaný stavový vektor a

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = (\rho v_s,\, \rho v_s v_1 + \delta_{s1} p,\, \rho v_s v_2 + \delta_{s2} p,\, (E + p)\, v_s)^{\mathrm{T}} \tag{4.30}$$

jsou nevazké toky. E je celková enrergie a δ_{sk} je Kroneckerovo delta. Stavová rovnice implikuje

$$p = (\gamma - 1)\,(E - \rho |\mathbf{v}|^2/2). \tag{4.31}$$

Uvažujeme počáteční podmínku

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.32}$$

a okrajové podmínky. Definujeme matici

$$\mathrm{P}(\mathrm{w}, \mathrm{n}) := \sum_{s=1}^{2} \mathrm{A}_s(\mathrm{w}) n_s, \tag{4.33}$$

kde $\mathrm{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2,\ n_1^2 + n_2^2 = 1$ a

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{w}) = \frac{D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}},\ s = 1, 2, \tag{4.34}$$

jsou Jakobiho matice zobrazení $\mathbf{f}_s$. Je možné ukázat, že platí

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w},\ s = 1, 2. \tag{4.35}$$

4.3.2 Diskrétní problém

Nechť Ω_h je aproximace Ω stejná jako v metodě konečných prvků. Jako $\mathcal{T}_h$ označíme triangulaci Ω_h skládající se z trojúhelníků $K_i \in \mathcal{T}_h,\ i \in I (I \subset \{0, 1, 2 \dots\}$ je vhodná indexová množina). Jako Γ_{ij} označíme společnou hranu mezi elementy K_i, K_j. Pro každý trojúhelník K_i označíme $S(i)$ množinu indexů takových, že

$$\partial K_i = \bigcup_{j \in S(i)} \Gamma_{ij}. \tag{4.36}$$

Symbol $\mathbf{n}_{ij} = ((n_{ij})_1, (n_{ij})_2)$ označuje normálu k ∂K_i na hraně Γ_{ij}. Jako h_{K_i} označíme průměr elementu K_i, $|K_i|$ označuje obsah K_i.

Přibližné řešení bude hledáno v každém časovém okamžiku jako prvek konečně dimenzionálního prostoru

$$S_h = S^{r,-1}(\Omega_h, \mathcal{T}_h) = \{v; v|_K \in P^r(K)\ \forall\, K \in \mathcal{T}_h\},$$

kde $r \geq 0$ je celé číslo a $P^r(K)$ označuje prostor všech polynomů na K stupně $\leq r$. Funkce $v \in S_h$ jsou obecně nespojité na hranicích Γ_{ij}.Jako $v|_{\Gamma_{ij}}$ a $v|_{\Gamma_{ji}}$ označíme hodnoty v na Γ_{ij} uvažované z vnitřku, respektive z vnějšku K_i.

K odvození diskrétní fomulace problému vynásobíme (4.28) testovací funkcí $\varphi \in S_h$, integrujeme přes každý element K_i, $i \in I$, aplikujeme Greenovu větu a sečteme přes všechny $i \in I$. Poté aproximujeme toky přes strany Γ_{ij} pomocí numerického toku $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{n})$ ve formě

$$\int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(t))\,(n_{ij})_s \cdot \varphi \,\mathrm{d}S \approx \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{H}(\mathbf{w}_h(t)|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}_h(t)|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij}) \cdot \varphi \,\mathrm{d}S.$$

Dále uvažujeme dělení $0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots$ časového intervalu $(0, T)$ a označíme $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Používáme označení $\mathbf{w}_h^k$ pro pro blibližné řešení v čase t_k. Použitím explicitní časové diskretizace bychom v důsledku podmínky stabilty museli uvažovat $0 < \tau_k \ll 1$. Použitím implicitního schématu bychom dostali silně nelineární algebraický systém. Uvažujeme proto semi-implicitní časovou diskretizaci. S použitím homogenity toků $\mathbf{f}_s$ a s Vijayasundaramovým numerickým tokem můžeme odvodit formu formu

$$\begin{aligned}
& b_h(\mathbf{w}_h^k, \mathbf{w}_h^{k+1}, \varphi_h) \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{s=1}^{2} \mathbf{A}_s(\mathbf{w}_h^k(\mathbf{x}))\mathbf{w}_h^{k+1}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \varphi_h(\mathbf{x})}{\partial x_s} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&+ \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left[\mathbf{P}^+\left(\langle \mathbf{w}_h^k \rangle_{ij}, \mathbf{n}_{ij}\right) \mathbf{w}_h^{k+1}|_{\Gamma_{ij}} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{P}^-\left(\langle \mathbf{w}_h^k \rangle_{ij}, \mathbf{n}_{ij}\right) \mathbf{w}_h^{k+1}|_{\Gamma_{ji}}\right] \cdot \varphi_h \mathrm{d}S.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Zde $\langle \mathbf{w}_h^k \rangle_{ij} = (\mathbf{w}_h^k|_{\Gamma_{ij}} + \mathbf{w}_h^k|_{\Gamma_{ji}})/2$ a $\mathbf{P}^{\pm} = \mathbf{P}^{\pm}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ označuje kladnou, resp. zápornou část matice $\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$. Forma b_h je lineární vzhledem ke druhé a třetí proměnné. Označíme $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_h = \int_{\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}x$ a zavedeme následující semi-implicitní schéma:
Pro každé $k \geq 0$ hledáme $\mathbf{w}_h^{k+1}$ tak, že

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad && \mathbf{w}_h^{k+1} \in \mathbf{S}_h, \\
&\text{b)} \quad && \left(\frac{\mathbf{w}_h^{k+1} - \mathbf{w}_h^k}{\tau_k}, \varphi_h \right)_h + b_h(\mathbf{w}_h^k, \mathbf{w}_h^{k+1}, \varphi_h) = 0, \ \forall \varphi_h \in \mathbf{S}_h, \ k = 0, 1, \ldots, \\
&\text{c)} \quad && \mathbf{w}_h^0 = \Pi_h \mathbf{w}^0 = \mathbf{S}_h - \text{interpolace } \mathbf{w}^0.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

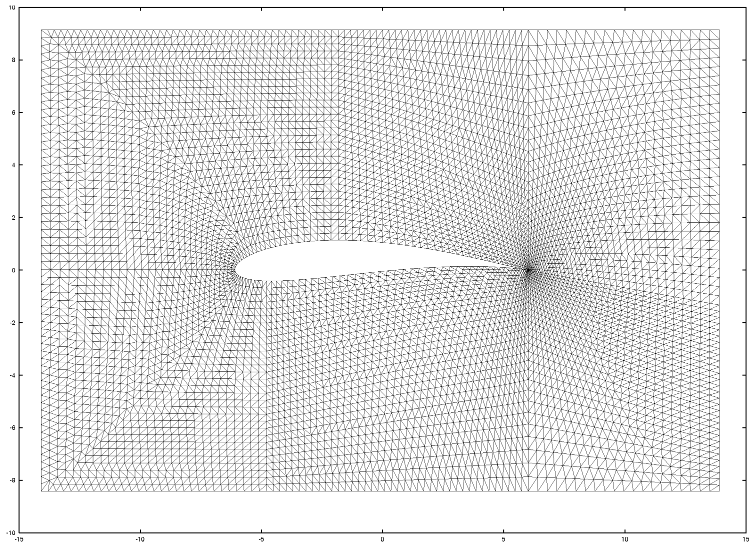
Přechod mezi časovými kroky je realizován pomocí řešení soustavy lineárních rovnic.

Pokud Γ_{ij} $(= \Gamma_{ji}) \subset \partial\Omega_h$, je třeba určit stav $\mathbf{w}_h^k|_{\Gamma_{ji}}$ na základě okrajových podmínek. V práci [7], paragraf 4, je popsána realizace okrajových podmínek umožňujících numerické řešení proudění s velkým rozsahem Machova čísla.

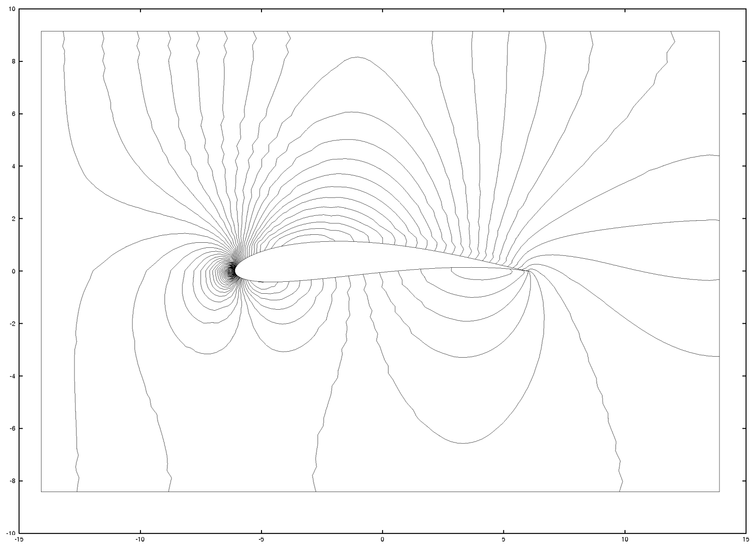
Kapitola 5

Výsledky

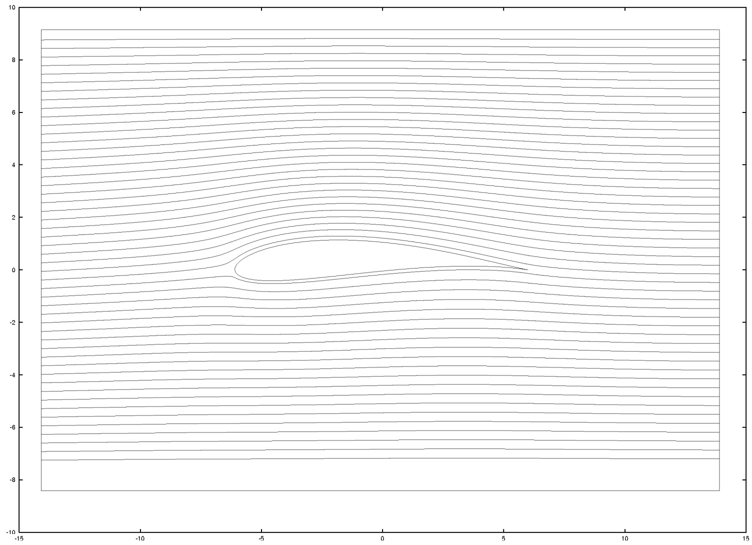
K testování numerických metod byl zvolen Žukovského profil s parametry $a = 6,\ h = 0.5, \Delta = 5$. Uvažujeme nulový náběžný úhel. Pro řešení problému metodou konečných prvků jsem používal program popsaný v [4], program vytvořil triangulaci, vypočítal proudovou funkci a rychlost ve vrcholech trojúhelníků. Maximální velikost rychlosti je $|\mathbf{b}| = 58,312300$. Minimum Machova čísla je 0,035995, maximum je 0,177087. Na vstupu (komponenta Γ_1) je hodnota Machova čísla přibližně 0,127. Získané výsledky jsou srovnány s výpočty obsaženými v práci [7].



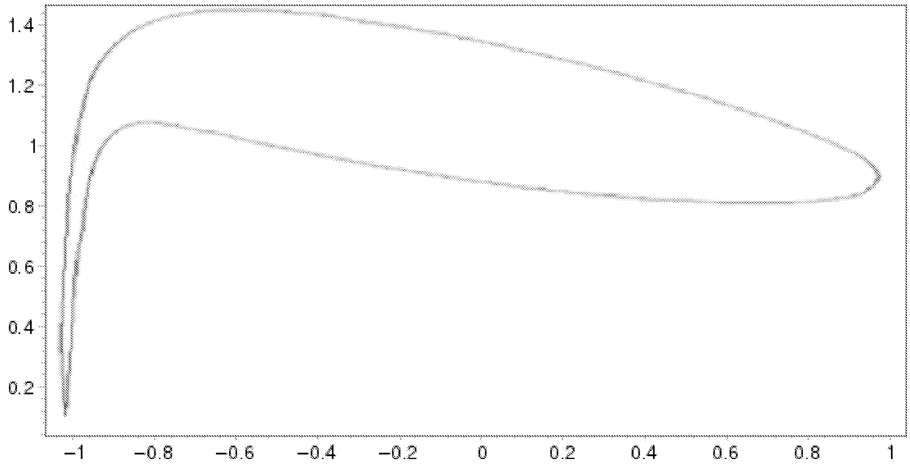
Obrázek 5.1: Triangulace výpočetní oblasti pro metodu konečných prvků



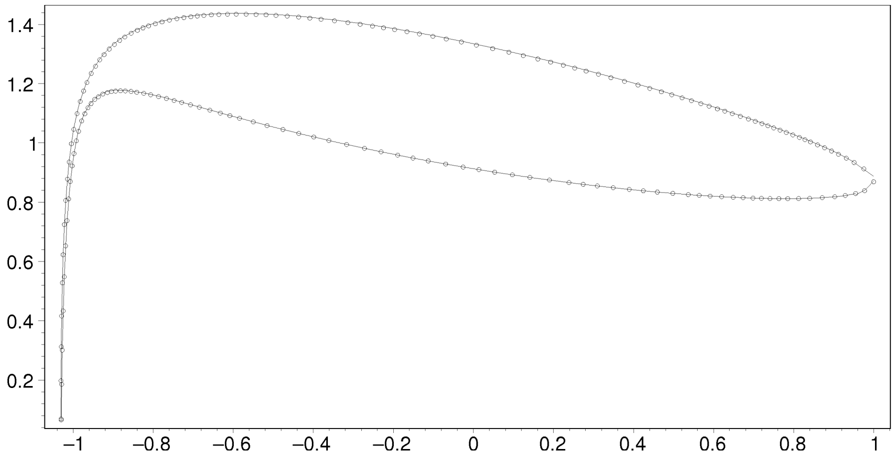
Obrázek 5.2: Izokřivky rychlosti získané metodou konečných prvků



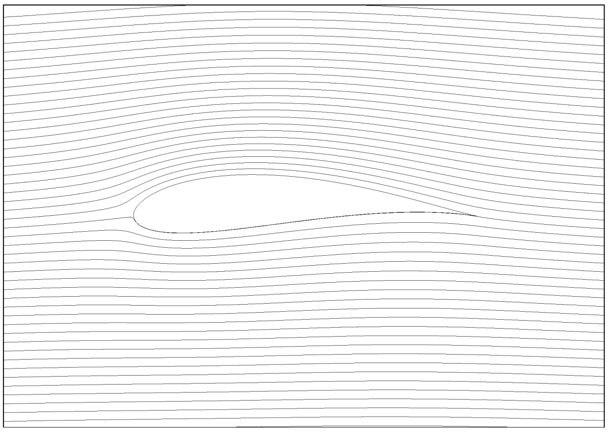
Obrázek 5.3: Graf proudnic, metoda konečných prvků



Obrázek 5.4: Rozdělení rychlosti podél profilu, metoda konečných prvků



Obrázek 5.5: Rozdělení rychlosti podél profilu, —— - nespojitá Galerkinova metoda, ∘ - přesné řešení nestlačitelného proudění


Obrázek 5.6: Proudnice získané nespojitou Galerkinovou metodou

Výsledky jsou kvalitativně stejné pro metodu konečných prvků i pro nespojitou Galerkinovu metodu. Narozdíl od metody konečných prvků aplikované na formulaci pomocí proudové funkce, která je použitelná pouze pro řešení subsonického, nevířivého, stacionárního proudění, je možné pomocí nespojité Galerkinovy metody pro řešení Eulerových rovnic modelovat i zavířené, nestacionární, transonické proudění. Její realizace je ale podstatně složitější.

Literatura

[1] Dolejší V., Feistauer M.: *On the discontinuous Galerkin finite element method for the numerical solution of inviscid compressible flow*, in: Brezzi F., Buffa A., Corsaro S., Murli A. (editors): *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, ENUMATH 2001, Springer, Milano, 2003, 65–84.

[2] Dolejší V., Feistauer M.: *A semi-implicit discontinuous Galerkin finite element method for the numerical solution of inviscid compressible flow*, J. Comput. Physics **198** (2004) 727–746.

[3] Feistauer M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman, Harlow, 1993.

[4] Feistauer M., Felcman J., Rokyta M., Vlášek Z.: *Numerické řešení modelů nevazkého nevířivého proudění metodou konečných prvků, výzkumná zpráva*, ŠKODA Plzeň, VVZ Turbíny, 1989.

[5] Feistauer M., Felcman J., Rokyta M., Vlášek Z.: *Finite-element solution of flow problems with trailing conditions*, J. Comput. Appl. Math. **44** (1992) 131–165.

[6] Feistauer M., Felcman J., Straškraba I.: *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[7] Feistauer M., Kučera V.: *On a robust discontinuous Galerkin technique for the solution of compressible flow*, J. Comput. Physics **224** (2007) 208–221.