Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Olšina

Elektrodynamika v blízkosti kosmické struny

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Studijní program: fyzika, obecná fyzika

2007

Rád bych poděkoval vedoucímu své práce, Doc. RNDr. Pavlu Krtoušovi, Ph.D., za velmi cenné konzultace a zapůjčení literatury.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Kroměříži dne 9.8.2007 Jan Olšina

Obsah

Název práce: Elektrodynamika v blízkosti kosmické struny
Autor: Jan Olšina
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
e-mail vedoucího: Pavel.Krtous@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci je spočten čtyřproud oscilujícího elektrického dipólu vyjádřený distribučně. Pomocí Greenovy funkce D'Alembertova operátoru v prostoročasu kosmické struny je vyjádřen čtyřpotenciál elektromagnetického pole buzeného oscilujícím dipólem ve tvaru integrálů přes světočáru dipólu. V práci je rozebrána možnost řešení těchto integrálů pro případ vzdálení budícího dipólu ve směru kolmém na strunu a ve směru podél struny. Dále je zkoumána možnost řešení tohoto integrálu záměnou s integrály vystupujícími v rozkladu Greenovy funkce na vlastní stavy D'Alembertiánu. Je také nalezena limita nulové frekvence, která souhlasí v výsledkem [2].

Klíčová slova: kosmická struna, Greenova funkce, elektrický dipól, elektromagnetická vlna, interakce

Title: Electrodynamics near cosmic string
Author: Jan Olšina
Department: Institute of theoretical physics
Supervisor: Doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Pavel.Krtous@mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study the time-dependent electromagnetic field in the spacetime of a cosmic string. First, we derive a distributional representation of the four-current of an oscillating electric dipole and compute the corresponding four-potential in the form of integrals over the worldline of the dipole. Next, we analyze the limit of the dipole positioned at a large distance in the direction perpendicular or parallel to the string. We obtain the studied field by direct integration using Green's functions and, alternatively, by decomposing the Green's functions into eigenvalues of the d'Alembert operator. Finally, we find the limit of zero frequency and compare it with [2].

Keywords: cosmic string, Green function, electric dipole, electromagnetic wave, interaction

Úvod[1]

Kosmické struny jsou (vedle magnetických monopólů a doménových zdí) topologické defekty vzniklé při fázovém přechodu v raném vesmíru.

Velmi úspěšné kalibrační teorie pole (kvantová chromodynamika a Weinberg-Salamova teorie) jsou založeny na lokálních kalibračních symetriích. Ty předpovídají při dostatečně vysoké energii fázový přechod, při kterém se lokální kalibrační symetrie mění - za vyšších energií je příslušná kalibrační symetrie vyjádřena obecně větší grupou. V případě Weinberg-Salamovy teorie dochází k fázovému přechodu při energiích přibližně rovné klidovým hmotnostem W a B bosonů, tj. 100 GeV, kvantová chromodynamika jeví fázový přechod při energiích 100 MeV (tento přechod na tzv. kvark-gluonové plazma byl již úspěšně experimentálně pozorován).

Předpokládá se, že k jednomu nebo více fázovým přechodům došlo při energiích 10^{15}–10^{16} GeV (teplota velkého sjednocení). Více viz např. [4]. Pro vznik topologických defektů je důležité, že snižování teploty nebylo zcela rovnoměrné, takže k fázovému přechodu na fázi s nižší symetrií došlo na mnoha místech zároveň. Symetrie se tedy narušila v těchto oblastech náhodně (navzájem nezávisle) – podobně jako krystaly vzniklé tuhnutím kapaliny mají jinak orientované krystalové mřížky a tedy jiné význačné směry. Nová fáze se šířila v podobě rozrůstajících se „bublin“. V místě, kde se fáze s jinak narušenou symetrií potkaly vznikaly topologické defekty: 0-rozměrné magnetické monopóly, 1-rozměrné kosmické struny a 2-rozměrné doménové stěny. Obdobný mechanismus i stejné topologické defekty můžeme pozorovat např. u supratekutého hélia, nebo u kapalných krystalů, které podstupují fázový přechod z fáze s rotační symetrií ($SO(3)$) do fáze s válcovou symetrií ($SO(2)$).

Kosmické struny jsou tedy velmi tenké (řádově tloušťky protonu) a extrémně husté objekty, které tvoří buďto uzavřené smyčky, nebo jsou nekonečné. Uzavřené smyčky, které lze topologicky stáhnout do bodu, se postupně vyzáří v podobě gravitačních vln, zatímco topologicky nestáhnutelné smyčky a nekonečné struny jsou stabilní i globálně - mohou se však navzájem protnout a změnit tím svoji topologii.

Přímou kosmickou strunu popisujeme metrikou, která odpovídá Minkowského prostoročasu v polárních souřadnicích tak, že struna leží v $\rho = 0$. Úhel φ však neprobíhá interval o velikosti 2π, ale obecně menší. Struna tedy vytváří kónickou singularitu, kdy prostoročas v okolí struny je lokálně plochý, veškerá křivost je soustředěna na struně a je charakterizována právě deficitním úhlem. Lokálně jsou velmi dobře splněny podmínky pro

[1] V následujícím úvodu je čerpáno především z přehledového článku [4], kde se lze o problematice kosmických strun a jiných topologických defektů dozvědět více.

takový popis – jak podmínka, že struna je dostatečně tenká, tak, že struna je dostatečně rovná.

V blízkosti kosmické struny se magnetické a elektrické pole chovají jinak, než bychom běžně očekávali. Jak je ukázáno v [1], [2], v blízkosti kosmické struny na sebe náboj, elektrický dipól a magnetický dipól působí prostřednictvím samo-interakce (samotný náboj je od struny odpuzován, dipóly se natáčejí ve směru podél struny), rovněž multipólový rozvoj jejich polí v nekonečnu může být jiný.

V této práci se zabývám výpočtem interakce elektromagnetického záření s kosmickou strunou. Protože v prostoročasu s deficitním úhlem nelze snadno popsat elektromagnetické vlnění rozkladem do rovinných vln, je potřeba úlohu řešit jinak. Využívám v práci faktu, že prostoročas v okolí kosmické struny je lokálně plochý a elektromagnetické pole při daném rozložení nábojů lze tedy najít řešením vlnové rovnice. Jako zdroj elektromagnetických vln volím oscilující elektrický dipól. Jím buzené elektromagnetické pole najdu aplikací Greenovy funkce příslušné k D'Alembertovu operátoru v prostoročasu struny (vypočtena v [2]). Toto pole již zahrnuje interakci kosmické struny s elektromagnetickým zářením dipólu.

Zkoumám dva hlavní přístupy. První spočívá v přímé integraci Greenovy funkce zúžené s čtyřproudem popisujícím oscilující dipól (distribuční vyjádření čtyřproudu je v práci odvozeno). Druhý přístup zahrnuje rozklad Greenovy funkce na vlastní stavy D'Alembertiánu. Vhodnou záměnou pořadí integrálů se snažím dospět k výhodnějšímu lépe integrovatelnému tvaru.

Ani jeden z těchto přístupů však nevede k analytickém vyjádření rozptylu elektromagnetické vlny, ani (kromě speciálních případů natočení dipólu) v případě šíření rovinných vln podél struny a lomu rovinných vln na struně (což odpovídá případu, kdy je budící dipól vzdálen ve směru podél struny, nebo ve směru kolmém na strunu).

Značení

V práci používám běžné značení. Vektory a formy značím tučně, jako

$$\boldsymbol{g}, \quad \mathbf{d}x^i, \quad \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^i}$$

(x^i přitom značí i-tou souřadnici.) V souřadnicovém zápisu značím řeckými písmeny (mimo μ, $\bar{\mu}$, φ, ρ) prostoročasové indexy. Není-li uvedeno jinak, platí vztah v libovolné bázi. Často je v textu uvedeno, že indexy v dané kapitole probíhají bázi (1.1) nebo (1.4). Latinkou psané sčítací indexy probíhají vždy prostorovou část báze (1.4).

Jednotlivé indexy z množiny $\{t, z, \rho, \varphi\}$, resp. $\{t, z, \mu, \bar{\mu}\}$, nečísluji. Namísto toho pokud chci zapsat danou hodnotu (obecného) indexu A^α, užívám přímo jméno souřadnice: $A^t, A^z, A^\rho, A^\varphi$, resp. $A^t, A^z, A^\mu, A^{\bar{\mu}}$. Proto názvy souřadnic vyjádřené řeckými písmeny nejsou použity pro označení obecných indexů.

Pro derivace veličin podle vlastního času používám značení

$$\dot{A}(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A(\tau) \, .$$

Kovariantní derivace v případě tenzorů takto neznačím, namísto toho užívám běžné značení $\frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{A}(\tau)$.

Pokud derivuji kovariantně funkci se dvěma argumenty a nemám ji vyjádřenou v souřadnicích (typicky gradient Diracovy δ-funkce), používám symboly ${}^{(\mathrm{l})}\nabla$, resp. ${}^{(\mathrm{r})}\nabla$ pro označení derivace v levém, resp. pravém argumentu dané funkce. Jedná-li se o derivaci s více složkami, vyznačím je indexem u daného symbolu jako ${}^{(\mathrm{l})}\nabla_\alpha$, resp. ${}^{(\mathrm{r})}\nabla_\alpha$.

Kapitola 1

Úvod do problematiky

1.1 Shrnutí vlastností prostoročasu kosmické struny

Podle [2] je prostoročas kosmické struny udán v bázi

$$\mathbf{d}t, \quad \mathbf{d}z, \quad \mathbf{d}\rho, \quad \mathbf{d}\varphi, \tag{1.1}$$

metrikou

$$\boldsymbol{g} = -\mathbf{d}t\,\mathbf{d}t + \mathbf{d}z\,\mathbf{d}z + \mathbf{d}\rho\,\mathbf{d}\rho + \rho^2\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi, \tag{1.2}$$

kde

$$t, z \in \mathbb{R}, \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi \in (-\pi/\nu; \pi/\nu)\,.$$

Parametr ν charakterizuje deficitní úhel podle vztahu $\Delta\varphi = 2\pi\,(1-\nu^{-1})$.

Z tvaru metriky je patrné, že Ricciho tenzor je nulový a prostoročas v okolí kosmické struny je plochý. (Metrika prostoročasu struny je stejná, jako metrika Minkowského prostoročasu v polárních souřadnicích, jen s tím rozdílem, že souřadnice φ nabývá jiných hodnot. Prostoročas lokálně nelze mimo osu $\rho = 0$ odlišit od prostoročasu Minkowského).

Je-li splněna Lorentzova kalibrační podmínka $(A^{\alpha}{}_{,\alpha})$, potom (pro nulový Ricciův tenzor) platí mezi čtyřproudem a čtyřpotenciálem následující vztah

$$A_{\alpha;\beta}{}^{\beta} = -J_{\alpha} \tag{1.3}$$

V [2] je vypočtena retardovaná Greenova funkce ${}^{\sigma}G^{\mathrm{ret}}(x|x')$ v následující bázi

$$\mathbf{d}t, \quad \mathbf{d}z, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{d}\rho + i\rho\,\mathbf{d}\varphi)\,, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{d}\rho - i\rho\,\mathbf{d}\varphi)\,. \tag{1.4}$$

V této bázi má metrika tvar

$$\boldsymbol{g} = -\mathbf{d}t\,\mathbf{d}t + \mathbf{d}z\,\mathbf{d}z + \boldsymbol{\mu}\bar{\boldsymbol{\mu}} + \bar{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\mu}. \tag{1.5}$$

Vlnová rovnice (1.3) má v bázi (1.4) tvar (viz [2])

$$^{0}LA_t = -J_t, \quad ^{0}LA_z = -J_z, \quad ^{+1}LA_{\mu} = -J_{\mu}, \quad ^{-1}LA_{\bar{\mu}} = -J_{\bar{\mu}}, \tag{1.6}$$

kde

$$^{0}L = \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right] \tag{1.7}$$

$$^{\pm 1}L = \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} \mp i\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2}\right] \tag{1.8}$$

Operátor (1.7) je přitom skalární D'Alembertův operátor v cylindrických souřadnicích. Retardovanou Greenovu funkci splňující[1]

$$^{\sigma}L_x {}^{\sigma}G^{\mathrm{ret}}(x|x') = \delta(x|x'), \quad \mathrm{supp}_x {}^{\sigma}G^{\mathrm{ret}}(x|x') \subset \mathrm{budoucnost}(x'), \tag{1.9}$$

uvádím podle [2] ve dvou tvarech. Různé tvary Greenovy funkce budou užity v různých přístupech k řešení problému oscilujícího dipólu. Nejprve uvedeme Greenovu funkci ve formě sumy přes vlastní hodnoty D'Alembertova operátoru:

$$^{\sigma}G^{\mathrm{ret}}(x|x') = \frac{\nu}{(2\pi)^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}+} \mathrm{d}\lambda\,\lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\kappa \int_{c_{\mathrm{ret}}} \mathrm{d}\omega \frac{e^{-i(-\omega\Delta t+\kappa\Delta z+\nu n\Delta\varphi)}}{-\omega^2+\kappa^2+\lambda^2} \mathrm{J}_{|\nu n+\sigma|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n+\sigma|}(\lambda\rho'). \tag{1.10}$$

Zde $\Delta t = t - t'$, $\Delta z = z - z'$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$, a c_{ret} je integrační cesta, podél reálné osy, která obchází póly $\omega = \pm\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}$ tak, že $\mathrm{Im}\,\omega < 0$, aby byla splněna podmínka (1.9).

Alternativně může být tento integrál vyčíslen jako

$$\begin{aligned} ^{\sigma}G^{\mathrm{ret}}(x|x') = {} & \frac{1}{2\pi}\theta(\Delta t)\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} e^{i\sigma(\Delta\varphi+2\pi k/\nu)}\delta\left(-\Delta t^2 + r_k^2\right) \qquad (1.11) \\ & -(-1)^{\sigma}\,\frac{\nu}{8\pi^2}\frac{\theta(\Delta t)\theta\left(\Delta t^2-\Delta z^2-(\rho+\rho')^2\right)}{\rho\rho'}\left[\frac{\mathrm{ch}\,\sigma\eta}{\mathrm{sh}\,\eta}\,\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi) + i\sigma\,\mathrm{Sh}(\eta,\Delta\varphi)\right], \end{aligned}$$

přičemž funkce $\mathrm{Sh}(\eta,\Delta\varphi)$, $\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi)$ a parametr η jsou definovány jako

$$\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi) \equiv \frac{\sin\nu\,(\pi-\Delta\varphi)}{\mathrm{ch}\,\nu\eta - \cos\nu\,(\pi-\Delta\varphi)} + \frac{\sin\nu\,(\pi+\Delta\varphi)}{\mathrm{ch}\,\nu\eta - \cos\nu\,(\pi+\Delta\varphi)}\,, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{Sh}(\eta,\Delta\varphi) \equiv \frac{\mathrm{sh}\,\nu\,(\pi-\Delta\varphi)}{\mathrm{ch}\,\nu\eta - \cos\nu\,(\pi-\Delta\varphi)} + \frac{\mathrm{sh}\,\nu\,(\pi+\Delta\varphi)}{\mathrm{ch}\,\nu\eta - \cos\nu\,(\pi+\Delta\varphi)}\,, \tag{1.13}$$

$$\mathrm{ch}\,\eta \equiv \frac{\Delta t^2 - \Delta z^2 - \rho^2 - \rho'^2}{2\rho\rho'}\,, \tag{1.14}$$

$$r_k^2 \equiv \Delta z^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\left(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) \tag{1.15}$$

a hraniční meze pro sumaci k_{i} a k_{f} jsou určeny podmínkami

$$\Delta\varphi + 2\pi\left(k_{\mathrm{i}} - 1\right)/\nu < -\pi < \Delta\varphi + 2\pi k_{\mathrm{i}}/\nu\,, \tag{1.16}$$

$$\Delta\varphi + 2\pi k_{\mathrm{f}}/\nu < \pi < \Delta\varphi + 2\pi\left(k_{\mathrm{f}} + 1\right)/\nu\,. \tag{1.17}$$

Pro podrobnější informace viz [1] a [2].

[1]budoucnost(x) značí množinu totožnou s vnitřkem světelného kužele příslušejícího bodu x, $\mathrm{supp}_x f(x)$ značí nosič (support) funkce $f(x)$, tedy množinu takových bodů, na nichž je $f(x)$ nenulová.

Kapitola 2

Výpočet čtyřproudu časově proměnného dipólu

Pro další výpočty je nutné znát distributivní vyjádření čtyřproudu bodového náboje a časově proměnného dipólu. S jejich využitím pak budeme studovat jimi buzené elektromagnetické pole. Tyto vztahy budou vypočteny s použitím toho, že prostoročas je lokálně plochý.

2.1 Odvození distribučního čtyřproudu dipólu rozvojem δ-funkcí ve výrazu pro čtyřproud bodového náboje

Vyjdeme z výrazu (viz [5] 6.93) pro distribuční čtyřproud bodového náboje se světočarou $x(\tau)$ a čtyřrychlostí $u_\alpha(\tau)$

$$J_\alpha(x) = e \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \, \delta\left(x|x(\tau)\right) u_\alpha(\tau) \; . \tag{2.1}$$

Předpokládejme, že dipól je složen ze dvou nábojů, které se pohybují podél světočar ${}^{+}x(\tau)$, ${}^{-}x(\tau)$ v těsné blízkosti světočáry ${}^{0}x(\tau)$. Budeme přitom předpokládat následující vzájemnou polohu nábojů

$${}^{\pm}x^\alpha(\tau) = {}^{0}x^\alpha(\tau) \pm \frac{1}{2} l^\alpha(\tau) \; . \tag{2.2}$$

Zde jsme všechny tři světočáry parametrizovali vlastním časem světočáry ${}^{0}x(\tau)$. Čtyřrychlosti ${}^{\pm}u(\tau)$ tak nejsou normalizované a dostáváme pro ně

$${}^{\pm}u^\alpha(\tau) = \frac{D\,{}^{\pm}x^\alpha(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = {}^{0}u^\alpha(\tau) \pm \frac{1}{2} \dot{l}^\alpha(\tau) \tag{2.3}$$

Přitom zde i v dalším textu používám značení

$$\dot{A}(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A(\tau) \ . \tag{2.4}$$

Protože vše odvozujeme pro lokálně plochý prostoročas a báze (ať už (1.4), nebo (1.1)) je konstantní v čase, píšeme rovnou místo všech kovariantních derivací podle vlastního času derivace

Ve vztahu pro výpočet čtyřproudu nezáleží na parametrizaci světočáry, jelikož změna normování čtyřrychlosti je kompenzována příslušnou změnou integrační proměnné. To nám umožňuje používat definici čtyřrychlosti jako derivaci podle vlastního času středu dvojice nábojů, pokud podle tohoto vlastního času také integrujeme.

Nyní rozepíšeme čtyřproud dipólu jako součet čtyřproudů jeho jednotlivých nábojů a provedeme rozvoj pro malá $\mathbf{l}(\tau)$.

$$\begin{aligned}
J_\alpha(x) = &\ {}^{+}J_\alpha(x) + {}^{-}J_\alpha(x) \\
= &\ e \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \ \left[\delta\left(x\middle|{}^{+}x(\tau)\right) {}^{+}u_\alpha(\tau) - \delta\left(x\middle|{}^{-}x(\tau)\right) {}^{-}u_\alpha(\tau)\right] \\
= &\ e \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \ \left[\delta\left(x\middle|{}^{0}x(\tau) + \tfrac{1}{2}\mathbf{l}(\tau)\right) \left({}^{0}u_\alpha(\tau) + \tfrac{1}{2}\dot{l}_\alpha(\tau)\right)\right. \\
&\left. - \ \delta\left(x\middle|{}^{0}x(\tau) - \tfrac{1}{2}\mathbf{l}(\tau)\right) \left({}^{0}u_\alpha(\tau) - \tfrac{1}{2}\dot{l}_\alpha(\tau)\right)\right] \\
= &\ e \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \ \left[\delta(x|{}^{0}x(\tau))\, {}^{0}u_\alpha(\tau) + \delta(x|{}^{0}x(\tau))\ \tfrac{1}{2}\dot{l}_\alpha + {}^{(\mathrm{r})}\nabla\delta(x|{}^{0}x(\tau)) \cdot \tfrac{1}{2}\mathbf{l}\, {}^{0}u_\alpha(\tau)\right. \\
&\left. - \ \delta(x|{}^{0}x(\tau))\,{}^{0}u_\alpha(\tau) + \delta(x|{}^{0}x(\tau))\ \tfrac{1}{2}\dot{l}_\alpha + {}^{(\mathrm{r})}\nabla\delta(x|{}^{0}x(\tau)) \cdot \tfrac{1}{2}\mathbf{l}\, {}^{0}u_\alpha(\tau)\right] \\
= &\ e \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \ \left[\delta(x|{}^{0}x(\tau))\dot{l}_\alpha(\tau) + {}^{(\mathrm{r})}\nabla\delta(x|{}^{0}x(\tau)) \cdot \mathbf{l}(\tau)\, {}^{0}u_\alpha(\tau)\right] \ .
\end{aligned}$$

V limitě $|\mathbf{l}| \to 0$ tak, že $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ zůstává konečné dostáváme

$$J_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \ \left[\delta(x|{}^{0}x(\tau))\dot{p}_\alpha(\tau) + {}^{(\mathrm{r})}\nabla\delta(x|{}^{0}x(\tau)) \cdot \mathbf{p}(\tau)\, {}^{0}u_\alpha(\tau)\right] \ . \tag{2.5}$$

2.2 Odvození distribučního čtyřproudu rozvojem integrálu vzniklého zhlazením čtyřproudu.

Zde provedeme kontrolu předchozího výpočtu tak, že distribuční čtyřproud dvou opačných nábojů

$$
\begin{aligned}
J_\alpha(x) &= {}^{+}J_\alpha(x) + {}^{-}J_\alpha(x) \\
&= e\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \,\left[\delta\left(x\middle|{}^{+}x(\tau)\right)\,{}^{+}u_\alpha(\tau) - \delta\left(x\middle|{}^{-}x(\tau)\right)\,{}^{-}u_\alpha(\tau)\right]
\end{aligned}
$$

zhladíme s testovací funkcí $\varphi^\alpha(x)$.

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x\,\varphi^\alpha(x) J_\alpha(x) &= \int \mathrm{d}x\,\varphi^\alpha(x)\left({}^{+}J_\alpha(x) + {}^{-}J_\alpha(x)\right) \\
&= e\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\left[\varphi^\alpha({}^{+}x(\tau)){}^{+}u_\alpha(\tau) - \varphi^\alpha({}^{-}x(\tau)){}^{-}u_\alpha(\tau)\right] \\
&= e\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\Big[\varphi^\alpha\left({}^{0}x(\tau) + \tfrac{1}{2}\mathbf{l}(\tau)\right)\left({}^{0}u_\alpha(\tau) + \tfrac{1}{2}\dot{l}_\alpha(\tau)\right) \\
&\quad - \varphi^\alpha\left({}^{0}x(\tau) - \tfrac{1}{2}\mathbf{l}(\tau)\right)\left({}^{0}u_\alpha(\tau) - \tfrac{1}{2}\dot{l}_\alpha(\tau)\right)\Big] \\
&= e\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\left[l^\beta\left(\nabla_\beta\varphi^\alpha\right)\left({}^{0}x(\tau)\right){}^{0}u_\alpha(\tau) + \varphi^\alpha({}^{0}x(\tau))\dot{l}_\alpha(\tau)\right]
\end{aligned}
$$

Nyní si stačí uvědomit, že toto lze také zapsat jako

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x\,\left[p^\beta(\tau)\left({}^{(\mathrm{r})}\nabla_\beta\delta(x|{}^{0}x(\tau))\varphi^\alpha(x)\right){}^{0}u_\alpha(\tau) + \delta(x|{}^{0}x(\tau))\varphi^\alpha(x)\dot{p}_\alpha(\tau)\right]\,. \tag{2.6}
$$

Distribuce odpovídající tomuto zhlazení je

$$
J_\alpha(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\left[\delta(x|{}^{0}x(\tau))\dot{p}_\alpha(\tau) + {}^{(\mathrm{r})}\nabla\delta(x|{}^{0}x(\tau))\cdot\mathbf{p}(\tau)\,{}^{0}u_\alpha(\tau)\right]\,, \tag{2.7}
$$

což je vidět po vytknutí $\varphi^\alpha(x)$ před závorku v (2.6). Tento výsledek je totožný s (2.5).

S využitím identity

$$
{}^{(\mathrm{r})}\nabla\delta(x|y) = -{}^{(\mathrm{l})}\nabla\delta(x|y) \tag{2.8}
$$

tento vztah můžeme upravit na

$$
J_\alpha(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\left[\delta(x|{}^{0}x(\tau))\dot{p}_\alpha(\tau) - \left({}^{(\mathrm{l})}\nabla\delta\right)(x|{}^{0}x(\tau))\cdot\mathbf{p}(\tau)\,{}^{0}u_\alpha(\tau)\right]\,. \tag{2.9}
$$

Kapitola 3

Přímý výpočet potenciálu buzeného bodovým dipólem

3.1 Volba vhodného tvaru závislosti dipólu na čase, rozpis do složek

Nejjednodušším zdrojem, jehož pomocí můžeme studovat chování elektromagnetického vlnění v okolí struny je Hertzův dipól. Zvolíme tedy dipólový moment obecně tak, aby kmital s konstantní frekvencí, ale v obecném směru. Fázový posun volíme tak, aby zjednodušil následující výpočty (v následujícím textu nebude samotná fáze v plné obecnosti potřeba).

$$\begin{aligned} p_t(\tau) &= \quad 0\,, \\ p_z(\tau) &= {}^0p_z \cos(\omega_0 \tau)\,, \\ p_\rho(\tau) &= {}^0p_\rho \cos(\omega_0 \tau)\,, \\ p_\varphi(\tau) &= {}^0p_\varphi \cos(\omega_0 \tau)\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

S využitím ortogonality metriky (1.2) snadno dopočteme kontravariantní tvary dipólových momentů

$$\begin{aligned} p^t(\tau) &= 0\,, \\ p^z(\tau) &= {}^0p^z \cos(\omega_0 \tau) = {}^0p_z \cos(\omega_0 \tau)\,, \\ p^\rho(\tau) &= {}^0p^\rho \cos(\omega_0 \tau) = {}^0p_\rho \cos(\omega_0 \tau)\,, \\ p^\varphi(\tau) &= {}^0p^\varphi \cos(\omega_0 \tau) = \frac{{}^0p_\varphi}{{}^0\rho^2} \cos(\omega_0 \tau)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Jelikož je ale výpočet čtyřpotenciálu jednodušší v bázi (1.4), převedeme dipólové momenty do ní. (Vypočteme inverze vztahů (1.4))

$$\mathbf{d}\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\mu} + \bar{\boldsymbol{\mu}})\,, \quad \mathbf{d}\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})\,. \tag{3.3}$$

Tedy kovariantní složky dipólového momentu jsou

$$\begin{aligned} p_t(\tau) = & \quad 0, \\ p_z(\tau) = & \ {}^0p_z \cos(\omega_0 \tau), \\ p_\mu(\tau) = & \ {}^0p_\mu \cos(\omega_0 \tau), \\ p_{\bar{\mu}}(\tau) = & \ {}^0p_{\bar{\mu}} \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Přitom ${}^0p_\mu$, ${}^0p_{\bar{\mu}}$ jsou zavedeny jako

$${}^0p_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left({}^0p_\rho - i \, \frac{{}^0p_\varphi}{{}^0\rho} \right), \quad {}^0p_{\bar{\mu}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left({}^0p_\rho + i \, \frac{{}^0p_\varphi}{{}^0\rho} \right). \tag{3.5}$$

Zvedneme-li indexy tohoto vektoru pomocí metriky (1.5), získáme výsledek

$$\begin{aligned} p^t(\tau) = & \quad 0, \\ p^z(\tau) = & \ {}^0p_z \cos(\omega_0 \tau), \\ p^\mu(\tau) = & \ {}^0p_{\bar{\mu}} \cos(\omega_0 \tau), \\ p^{\bar{\mu}}(\tau) = & \ {}^0p_\mu \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2 Výpočet přímou aplikací Greenovy funkce

Vyjdeme z výrazu (1.6) vyjadřujícího vlnovou rovnici, kterou chceme řešit, v bázi (1.4). Greenova funkce vzhledem k operátorům ${}^{\sigma}L$ je vyjádřena výrazem (1.11). Integrujeme tedy přímo Greenovu funkci aplikovanou na čtyřproud (2.5) s tím, že dosadíme ${}^{0}u_t = -1$

$$A_t(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, {}^{0}G^{\mathrm{ret}}(x|x') \left[{}^{(\mathrm{r})}\nabla_i \delta\left(x' \middle| {}^{0}x(\tau)\right)\, p^i(\tau)\right], \tag{3.7}$$

$$A_z(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, {}^{0}G^{\mathrm{ret}}(x|x') \left[\delta\left(x' \middle| {}^{0}x(\tau)\right) \dot{p}_z(\tau)\right], \tag{3.8}$$

$$A_\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, {}^{1}G^{\mathrm{ret}}(x|x') \left[\delta\left(x' \middle| {}^{0}x(\tau)\right) \dot{p}_\mu(\tau)\right], \tag{3.9}$$

$$A_{\bar{\mu}}(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, {}^{-1}G^{\mathrm{ret}}(x|x') \left[\delta\left(x' \middle| {}^{0}x(\tau)\right) \dot{p}_{\bar{\mu}}(\tau)\right]. \tag{3.10}$$

Zde jsme využili prostorový charakter dipólu $\mathbf{p}$ a vyjádření (1.6) v bázi (1.4). Navíc díky konstantnosti této báze a lokální plochosti prostoročasu můžeme rovnou psát $\frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau} p_\alpha = \dot{p}_\alpha$.

Integraci rozdělíme do dvou částí: Podle [2] lze Greenovu funkci rozdělit na dva členy – na geodetický člen odpovídající prvnímu řádku (1.11) (potenciál vzniklý jeho integrací je součtem příspěvků „klasického“ záření dipólu podél všech geodetik, kterými se lze ze zdroje k testovanému bodu dostat) a rozptylový člen (který charakterizuje rozptyl na křivosti struny jako takové – odpovídá druhému členu (1.11)).

Označme $A^{\mathrm{G}}_\alpha(x)$ tu část čtyřpotenciálu, kterou získáme pomocí geodetické části Greenovy funkce a $A^{\mathrm{R}}_\alpha(x)$ tu část čtyřpotenciálu, kterou získáme integrací rozptylové části Greenovy funkce. Potom zjevně platí

$$A_\alpha(x) = A^{\mathrm{G}}_\alpha(x) + A^{\mathrm{R}}_\alpha(x). \tag{3.11}$$

Integraci $A^{\mathrm{G}}_\alpha(x)$ a $A^{\mathrm{R}}_\alpha(x)$ provedeme zvlášť.

3.2.1 Integrace geodetické části Greenovy funkce

V této části provedeme standardní integraci geodetické části integrálů (3.7)–(3.10), ve kterých dosadíme za Greenovu funkce její geodetickou část a integrály zjednodušíme. Připomeňme, že Greenova funkce má dva argumenty x, x', kde přes x' integrujeme. Tyto proměnné v integrálech vystupují prostřednictvím výrazů definovaných v první kapitole:

$\Delta t = t - t'$, $\Delta z = z - z'$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$.

$$A_t^{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x'\, \theta(\Delta t) \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \delta\left(-\Delta t^2 + r_k^2\right) \left[{}^{(\mathrm{r})}\nabla_i \delta\left(x' \middle| {}^0x(\tau)\right)\, p^i(\tau)\right], \tag{3.12}$$

$$A_z^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x'\, \theta(\Delta t) \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \delta\left(-\Delta t^2 + r_k^2\right) \left[\delta\left(x' \middle| {}^0x(\tau)\right) \dot{p}_z(\tau)\right], \tag{3.13}$$

$$A_\mu^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x'\, \theta(\Delta t) \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} e^{i(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu)} \delta\left(-\Delta t^2 + r_k^2\right) \left[\delta\left(x' \middle| {}^0x(\tau)\right) \dot{p}_\mu(\tau)\right], \tag{3.14}$$

$$A_{\bar{\mu}}^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x'\, \theta(\Delta t) \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} e^{-i(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu)} \delta\left(-\Delta t^2 + r_k^2\right) \left[\delta\left(x' \middle| {}^0x(\tau)\right) \dot{p}_{\bar{\mu}}(\tau)\right]. \tag{3.15}$$

Sčítání zde probíhá přes všechny nulové geodetiky spojující body x s polohou zdroje ${}^0x(\tau)$, meze k_{f} , k_{i} jsou dány (1.16)–(1.17).

Provedeme integrování vzhledem k pravé δ-funkci a změníme integrační meze podle θ-funkcí.

$$A_t^{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau\, \frac{\partial}{\partial x'^i} \left[\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \delta\left(-\Delta t^2 + r_k^2\right)\, p^i(\tau)\right]\Bigg|_{x'^\alpha = {}^0x^\alpha(\tau)}, \tag{3.16}$$

$$A_z^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \delta\left(-(t-\tau)^2 + {}^0r_k^2\right) \dot{p}_z(\tau), \tag{3.17}$$

$$A_\mu^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} e^{i\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)} \delta\left(-(t-\tau)^2 + {}^0r_k^2\right) \dot{p}_\mu(\tau), \tag{3.18}$$

$$A_{\bar{\mu}}^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} e^{-i\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)} \delta\left(-(t-\tau)^2 + {}^0r_k^2\right) \dot{p}_{\bar{\mu}}(\tau). \tag{3.19}$$

Zde ke značení $\Delta\varphi$, $\Delta\rho$, Δz z první kapitoly zavádíme

$$\begin{aligned} &{}^0\Delta z \equiv z - {}^0z, \quad {}^0\Delta\rho \equiv \rho - {}^0\rho, \quad {}^0\Delta\varphi \equiv \varphi - {}^0\varphi\,, \\ &{}^0r_k^2 \equiv ({}^0\Delta z)^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 - 2\,{}^0\rho\rho\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right). \end{aligned}$$

Použijeme identitu

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0 : f(x_0)=0} \frac{1}{|f'(x_0)|}\, \delta(x - x_0) \tag{3.20}$$

a zderivujeme δ-funkci v prvním integrálu podle prostorových souřadnic. Do sumy přes kořeny přitom zahrnujeme jen ty, přes které integrujeme, tedy ty, které splňují podmínku kladenou na retardovanou Greenovu funkci $t > \tau$.

$$A_t^{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau \, \left[\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \delta' \left(-\Delta t^2 + r_k^2 \right) \frac{\partial (r_k^2)}{\partial x'^i}\, p^i(\tau) \right] \Bigg|_{x'^\alpha = {}^0x^\alpha(\tau)} , \tag{3.21}$$

$$A_z^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \frac{1}{2\, {}^0r_k} \dot{p}_z(t - {}^0r_k), \tag{3.22}$$

$$A_\mu^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} e^{i\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)} \frac{1}{2\, {}^0r_k} \dot{p}_\mu(t - {}^0r_k), \tag{3.23}$$

$$A_{\bar{\mu}}^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} e^{-i\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)} \frac{1}{2\, {}^0r_k} \dot{p}_{\bar{\mu}}(t - {}^0r_k). \tag{3.24}$$

Integraci v (3.21) nyní provedeme nejprve použitím vztahu (3.20), zderivováním a zhlazením δ-funkce, což odpovídá nahrazení derivace δ-funkce podle vztahu

$$\delta'(f(x)) = \sum_{x_0 : f(x_0)=0} \left(\frac{1}{f'(x_0)\, |f'(x_0)|}\, \delta'(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2\, |f'(x_0)|}\, \delta(x - x_0) \right) \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} A_t^{\mathrm{G}}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau \left[\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \left(\frac{1}{4r_k^2}\, \delta'(\tau - t + r_k) - \frac{1}{4r_k^3}\, \delta(\tau - t + {}^0r_k) \right) \frac{\partial (r_k^2)}{\partial x'^i}\, p^i(\tau) \right] \Bigg|_{x'^\alpha = {}^0x^\alpha(\tau)} \\ &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \left[\frac{1}{r_k^2} \frac{\partial (r_k^2)}{\partial x'^i}\, \dot{p}^i(t - r_k) + \frac{1}{r_k^3} \frac{\partial (r_k^2)}{\partial x'^i}\, p^i(t - r_k) \right] \Bigg|_{x'^\alpha = {}^0x^\alpha(\tau)} . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Po provedení derivace $\frac{\partial(r_k^2)}{\partial x'^i}$ získáme následující celkový tvar.

$$
\begin{aligned}
A_t^{\mathrm{G}}(x) = {} & \frac{1}{4\pi\, {}^0r_k^2} \sum_{k=k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{f}} \Bigg({}^0\rho\rho \sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) \left(\dot{p}^\varphi(t - {}^0r_k) + \frac{1}{{}^0r_k} p^\varphi(t - {}^0r_k)\right) + \\
& + {}^0\Delta z \left(\dot{p}^z(t - {}^0r_k) + \frac{1}{{}^0r_k} p^z(t - {}^0r_k)\right) - \\
& - \left({}^0\rho - \rho\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right) \left(\dot{p}^\rho(t - {}^0r_k) + \frac{1}{{}^0r_k} p^\rho(t - {}^0r_k)\right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

$$
A_z^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{4\pi\, {}^0r_k} \sum_{k=k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{f}} \dot{p}_z(t - {}^0r_k), \tag{3.28}
$$

$$
A_\mu^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{4\pi\, {}^0r_k} \sum_{k=k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{f}} e^{i\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)} \dot{p}_\mu(t - {}^0r_k), \tag{3.29}
$$

$$
A_{\bar{\mu}}^{\mathrm{G}}(x) = -\frac{1}{4\pi\, {}^0r_k} \sum_{k=k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{f}} e^{-i\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)} \dot{p}_{\bar{\mu}}(t - {}^0r_k), \tag{3.30}
$$

resp.

$$
A_\rho^{\mathrm{G}}(x) = -\sum_{k=k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{f}} \frac{{}^0\rho \dot{p}_\rho(t - {}^0r_k)\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) + \dot{p}_\varphi(t - {}^0r_k)\sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\, {}^0r_k\, {}^0\rho}, \tag{3.31}
$$

$$
A_\varphi^{\mathrm{G}}(x) = \sum_{k=k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{f}} \frac{{}^0\rho \dot{p}_\rho(t - {}^0r_k)\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) - \dot{p}_\varphi(t - {}^0r_k)\sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\, {}^0r_k}. \tag{3.32}
$$

Za předpokladu $\frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{p} = 0$ tento výsledek přechází (až na jinou definici p^φ) v geodetickou část pole statického elektrického dipólu 3.10 v [2].

3.2.2 Integrace rozptylové části Greenovy funkce

V této části dosadíme v integrálech (3.7)–(3.10) za Greenovu funkci její rozptylovou část a upravíme je do vhodnějšího tvaru. Jednak využijeme, že čtyřrychlost je kolmá na vektor dipólového momentu (3.1), což nám zaručí, že čtyřrychlost nevystupuje v prostorové části potenciálu a dipólový moment v časové složce čtyřpotenciálu vystupuje jen ve zúžení s gradientem δ-funkce. Rozepíšeme integrály jako

$$
\begin{aligned}
A_t^{\mathrm{R}}(x) = \quad & -\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \; \frac{\nu}{8\pi^2} \frac{\Theta}{\rho\rho'} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\eta} \, \mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi) \right] \\
& \times \left[{}^{(\mathrm{r})}\nabla_i \, \delta \left(x' \middle| {}^0x(\tau) \right) \, {}^0p^i \cos(\omega_0 \tau) \right], \qquad (3.33) \\
A_z^{\mathrm{R}}(x) = \quad & +\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \, \frac{\nu}{8\pi^2} \frac{\Theta}{\rho\rho'} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\eta} \, \mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi) \right] \\
& \times \left[\delta \left(x' \middle| {}^0x(\tau) \right) {}^0p_z \, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \cos(\omega_0 \tau) \right], \qquad (3.34) \\
A_\mu^{\mathrm{R}}(x) = \quad & -\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \, \frac{\nu}{8\pi^2} \frac{\Theta}{\rho\rho'} \left[\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\eta} \, \mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi) + i \, \mathrm{Sh}(\eta, \Delta\varphi) \right] \\
& \times \left[\delta \left(x' \middle| {}^0x(\tau) \right) {}^0p_\mu \, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \cos(\omega_0 \tau)(\tau) \right], \qquad (3.35) \\
A_{\bar\mu}^{\mathrm{R}}(x) = \quad & -\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \, \frac{\nu}{8\pi^2} \frac{\Theta}{\rho\rho'} \left[\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\eta} \, \mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi) - i \, \mathrm{Sh}(\eta, \Delta\varphi) \right] \\
& \times \left[\delta \left(x' \middle| {}^0x(\tau) \right) {}^0p_{\bar\mu} \, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \cos(\omega_0 \tau) \right]. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Zde

$$
\Theta \equiv \theta(\Delta t)\theta\left(\Delta t^2 - \Delta z^2 - (\rho + \rho')^2\right) \qquad (3.37)
$$

zastupuje Heavisideovy funkce, které vymezí integrační meze v integrálu přes τ. Vztah mezi η a τ je dán definicí (1.14) a funkce $\mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi)$, $\mathrm{Sh}(\eta, \Delta\varphi)$, jsou definovány vztahy (1.12),(1.13). η, $\Delta\varphi$, Δz jsou funkce x'. (Viz zavedení v podkapitole věnované integraci geodetické části Greenovy funkce.)

Diracovy δ-funkce jsou normalizovány vůči metrickému objemovému elementu $\mathrm{d}x'$. Gradient v časové složce ${}^{(\mathrm{r})}\nabla_i$ (3.34) derivuje v pravém argumentu δ-funkce, lze jej tedy z integrování přes $\mathrm{d}x'$ vytknout. Záměnou integrálů přes x' a přes τ a vyintegrováním δ-funkce v prostorové části obdržíme tvar

$$
A_t^{\mathrm{R}}(x) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \, {}^0p^i \cos(\omega_0 \tau) \, \frac{\partial}{\partial x'^i} \left[\frac{\nu}{8\pi^2} \frac{\Theta}{\rho\rho'} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\eta} \, \mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi) \right] \right] \Bigg|_{x'^\alpha = {}^0x^\alpha(\tau)} . \qquad (3.38)
$$

V prostorové části navíc provedeme derivace $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \cos(\omega_0 \tau)$ s příslušnou změnou znaménka a obdobně získáme

$$A^{\mathrm{R}}_{z}(x) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \frac{\nu}{8\pi^2}\frac{\Theta}{\rho\rho'}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\,\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi)\right] {}^0\!p_z\,\omega_0 \sin\left(\omega_0\tau\right)\Big|_{x'^\alpha={}^0x^\alpha(\tau)}, \tag{3.39}$$

$$A^{\mathrm{R}}_{\mu}(x) = +\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \frac{\nu}{8\pi^2}\frac{\Theta}{\rho\rho'}\left[\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\eta}\,\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi) + i\,\mathrm{Sh}(\eta,\Delta\varphi)\right]$$

$$\times {}^0\!p_\mu\,\omega_0 \sin\left(\omega_0\tau\right)\Big|_{x'^\alpha={}^0x^\alpha(\tau)}, \tag{3.40}$$

$$A^{\mathrm{R}}_{\bar\mu}(x) = +\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \frac{\nu}{8\pi^2}\frac{\Theta}{\rho\rho'}\left[\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\eta}\,\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi) - i\,\mathrm{Sh}(\eta,\Delta\varphi)\right]$$

$$\times {}^0\!p_{\bar\mu}\,\omega_0 \sin\left(\omega_0\tau\right)\Big|_{x'^\alpha={}^0x^\alpha(\tau)}. \tag{3.41}$$

Zaměřme se na úpravu gradientu v (3.38), který provádíme v bázi (1.1). Funkce η závisí kromě τ na prostorových souřadnicích ρ', z', φ', musíme tedy derivace provést s ohledem na to, že je η funkcí těchto proměnných. Můžeme psát

$$\operatorname{sh}\eta\,\frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\,\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi)\right) = -\delta_{i\varphi'}\frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\eta}\frac{1}{\operatorname{sh}\eta} - \frac{\mathrm{S}\,\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}^2\eta}\right)\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial x'^i}\,, \tag{3.42}$$

kde se z důvodů, které budou zřejmé později, zatím nevěnujeme skokové funkci Θ. Provedli jsme několik úprav: Nejprve jsme rozepsali úplnou derivaci $\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi)$ podle řetízkového pravidla na parciální derivace podle jednotlivých proměnných

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{S}}{\mathrm{d}x'^i} = \left(\frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial x'^i}\right)_\eta + \frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\left(\operatorname{ch}\eta\right)}\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial x'^i} = \delta_{i\varphi'}\frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\left(\Delta\varphi\right)}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varphi'} + \frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\eta}\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial x'^i}\,. \tag{3.43}$$

$S(\eta,\Delta\varphi)$ je funkcí proměnné $\Delta\varphi$. Připomeňme definici $\Delta\varphi \equiv \varphi - \varphi'$. Také jsme všechny derivace $\frac{\partial\eta}{\partial x'^i}$ vyjádřili přes derivace podle $\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial x'^i}$, které bude snazší vyjádřit, jak se ukáže níže. Rovněž jsme použili úpravu

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\left(\operatorname{ch}\eta\right)} = \left(\frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{ch}\eta\right)}{\mathrm{d}\eta}\right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\,.$$

Nakonec využíváme identitu $\operatorname{sh}\eta = \sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - 1}$, která platí pro $\eta > 0$, což je ale splněno.

Zbývá rozepsat derivace $\operatorname{ch}\eta$, pomocí kterých máme vyjádřeny předchozí derivace složitějších funkcí:

$$\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial\varphi'} = \frac{\partial}{\partial\varphi'}\left(\frac{\Delta t^2 - (z-z')^2 - \rho^2 - \rho'^2}{2\rho\rho'}\right) = 0, \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\Delta t^2 - (z-z')^2 - \rho^2 - \rho'^2}{2\rho\rho'}\right) = \frac{z-z'}{\rho\rho'}, \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial\rho'} = \frac{(z-z')^2 - \Delta t^2 + \rho^2 - \rho'^2}{2\rho\rho'^2} = -\frac{\rho\,\operatorname{ch}\eta + \rho'}{\rho\rho'}. \tag{3.46}$$

Regularizace distribuce spojené s rozptylem na struně

Než provedeme gradient v (3.38), je potřeba odstranit problém, který by vznikl, pokud bychom neopatrně neužili derivaci v oboru distribucí. Zatímco funkce

$$\frac{\Theta}{\operatorname{sh}\eta}\,\mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi) \tag{3.47}$$

vystupující v integrálu (3.38) je integrovatelná v τ, její gradient již integrovatelný není. Je proto potřeba zvolit vhodnou regularizaci a řešit integrály v oboru distribucí.

Θ je součinem $\theta(\Delta t)$ a $\theta\left(\Delta t^2 - \Delta z^2 - (\rho+\rho')^2\right)$. První z těchto výrazů zaručuje, že $t > \tau$ a tedy, že užitá Greenova funkce je retardovaná, druhý z nich se stará o to, aby se náboj projevoval jen uvnitř svého světelného kužele. Gradient funkce (3.47) je problematicky integrovatelný v bodě, kdy světelný kužel dipólu protíná kosmickou strunu – člen $\theta(\Delta t)$ tedy v rozptylové části hraje jen pasivní roli (projeví se v integračních mezích) a můžeme nahradit Θ za $\theta\left(\Delta t^2 - \Delta z^2 - (\rho+\rho')^2\right)$ (s tím, že nadále budeme vždy požadovat $t > \tau$).

Problémy s integrovatelností vyřešíme zavedením regularizace

$$\theta\left(\Delta t^2 - \Delta z^2 - (\rho+\rho')^2\right) \to \theta\left(\Delta t^2 - \Delta z^2 - (\rho+\rho')^2 - \varepsilon\right), \tag{3.48}$$

kde $\varepsilon > 0$ je infinitezimální reálná proměnná. Na závěr provedeme limitu $\varepsilon \to 0$.

Převedeme Θ do parametru η zavedeného později v (3.51) a upravíme na

$$\theta\left(\Delta t^2 - \Delta z^2 - (\rho+\rho')^2 - \varepsilon\right) = \theta\left(2\rho\rho'\left(\operatorname{ch}\eta - 1\right) - \varepsilon\right) = \theta\left(\eta - \varepsilon\right)\ . \tag{3.49}$$

Integrál (3.38) tak přejde na tvar

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{R}}_t(x) = & -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\frac{\partial}{\partial x'^i}\left[\frac{\nu}{8\pi^2}\frac{\theta(\eta-\varepsilon)}{\rho\rho'}\frac{{}^0\!p^i\cos\left(\omega_0\tau\right)}{\operatorname{sh}\eta}\ \mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi)\right]\Bigg|_{x'^\alpha={}^0\!x^\alpha(\tau)} \\ = & -\frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\Bigg[\delta(\eta-\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}(\operatorname{ch}\eta)}\frac{\partial\operatorname{ch}\eta}{\partial x'^i}\frac{{}^0\!p^i\cos\left(\omega_0\tau\right)}{\rho\rho'\ \operatorname{sh}\eta}\ \mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi)\ + \\ & +\theta(\eta-\varepsilon)\ \frac{\partial}{\partial x'^i}\left[\frac{1}{\rho\rho'}\frac{{}^0\!p^i\cos\left(\omega_0\tau\right)}{\operatorname{sh}\eta}\ \mathrm{S}(\eta,\Delta\varphi)\right]\Bigg]\Bigg|_{x'^\alpha={}^0\!x^\alpha(\tau)} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Zde jsme provedli derivaci zvlášť vzhledem ke skokové funkci, jejímž zderivováním vzniká δ-funkce s příslušným argumentem.

Přechod k parametru η v integraci přes světočáru dipólu

V dalších výpočtech se jeví jako výhodné používat místo vlastního času dipólu parametr η zavedený v (1.14). K η přejdeme pomocí vztahů

$$\tau = t - \sqrt{\Delta z^2 + \rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \operatorname{ch}\eta}, \quad \mathrm{d}\tau = \frac{\rho\rho'}{(\tau - t)} \operatorname{sh}\eta \, \mathrm{d}\eta. \tag{3.51}$$

Od této chvíle již tedy η není funkcí x', ale integračním parametrem. Abychom zachovali konzistentní značení a vyhnuli se zbytečnému vypisování dlouhých tvarů, definujme

$$\varsigma(\eta) \equiv {}^0\!p^z \frac{z - {}^0z}{{}^0\rho\rho} - {}^0\!p^\rho \frac{\rho \operatorname{ch}\eta + {}^0\rho}{{}^0\rho\rho} \tag{3.52}$$

$$\Xi(\eta) \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i} \left[\frac{1}{\rho\rho'} \frac{{}^0\!p^i \cos(\omega_0\tau)}{\operatorname{sh}\eta(x, x', \tau)} \, \mathrm{S}(\eta(x, x', \tau), \Delta\varphi) \right] \Bigg|_{x'^\alpha = {}^0x^\alpha(\tau(\eta))}. \tag{3.53}$$

V definici (3.53) nejprve provedeme derivaci s tím, že $\eta(x, x', \tau)$ zde vystupuje jako funkce a poté dosadíme (3.51) a nahradíme x' za polohu světočáry dipólu ${}^0x(\tau(\eta))$, která je parametrizována parametrem η.

Nyní můžeme integrál (3.50) upravit dále – provedením integrálů z δ-funkce a skokové funkce obdržíme

$$\begin{aligned} A_t^{\mathrm{R}}(x) = {} & \frac{\nu}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\eta} \varsigma(\eta) \frac{{}^0\!p^i \cos(\omega_0\tau)}{(\tau - t)} \, \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \right] \Bigg|_{\eta=\varepsilon,\ \tau = -\sqrt{\Delta z^2 + (\rho+\rho')^2} + t} \\ & + \frac{\nu}{8\pi^2} \int_\varepsilon^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{{}^0\rho\rho}{(\tau - t)} \operatorname{sh}\eta \, \Xi(\eta) \end{aligned} \tag{3.54}$$

Tento tvar zapíšeme jako

$$A_t^{\mathrm{R}}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{\Lambda}{\operatorname{sh}\varepsilon} + \frac{\nu}{8\pi^2} \int_\varepsilon^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{{}^0\rho\rho}{(\tau - t)} \operatorname{sh}\eta \, \Xi(\eta) \right) \tag{3.55}$$

kde jsme označili

$$\Lambda = \frac{\nu}{8\pi^2} \frac{(\rho + {}^0\rho)\, {}^0\!p^\rho - {}^0\Delta z \, {}^0\!p^z}{\rho \, {}^0\rho} \frac{\cos\Big(-\omega_0 \sqrt{{}^0\Delta z^2 + (\rho + {}^0\rho)^2} + \omega_0 t \Big)}{\sqrt{{}^0\Delta z^2 + (\rho + {}^0\rho)^2}} \, \mathrm{S}\big(0, {}^0\Delta\varphi\big) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3.56}$$

Λ je normalizační konstanta před členem $\frac{1}{\operatorname{sh}\varepsilon}$, který zaručuje, že po jeho přičtení k divergentnímu integrálu v (3.55) obdržíme konečný výsledek, a to invariantně vzhledem k použité regularizaci.

Výsledný tvar rozptylové části integrálu přes světočáru

Pokračujme dále v úpravách časové složky čtyřpotenciálu dipólu. Integrál (3.55) s uvážením vztahů (3.44), (3.45), (3.46), a rozpisu derivace (3.42) přepíšeme jako

$$
\begin{aligned}
A_t^{\mathrm{R}}(x) \;&=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Lambda}{\operatorname{sh}\varepsilon}+\frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathrm{d}\eta\frac{\left(\mathrm{S}\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}^2\eta}-\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\eta}\right)\left({}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{{}^0\!\rho\rho}-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{\rho\rho'}\right)\cos(\omega_0\tau)}{-\sqrt{({}^0\Delta z)^2+\rho^2+({}^0\!\rho)^2+2\,{}^0\!\rho\rho\operatorname{ch}\eta}}\right.\\
&\left.+\;\frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathrm{d}\eta\frac{\left(-{}^0\!p^\varphi\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\varphi}-{}^0\!p^\rho\,{}^0\!\rho^{-1}\,\mathrm{S}\right)\cos(\omega_0\tau)}{-\sqrt{({}^0\Delta z)^2+\rho^2+({}^0\!\rho)^2+2\,{}^0\!\rho\rho\operatorname{ch}\eta}}\right)
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Nyní uděláme per-partes na člen v integrálu obsahující $\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\eta}$ tak, že integrujeme $\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\eta}$ a funkci, která je s ní v součinu derivujeme:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathrm{d}\eta\frac{\frac{\cos(\omega_0\tau)}{\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\eta}\left({}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{{}^0\!\rho\rho}-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{{}^0\!\rho\rho}\right)}{\sqrt{({}^0\Delta z)^2+\rho^2+({}^0\!\rho)^2+2\,{}^0\!\rho\rho\operatorname{ch}\eta}}=\left[\frac{\frac{\cos(\omega_0\tau)}{\operatorname{sh}\eta}\,\mathrm{S}\left({}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{{}^0\!\rho\rho}-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{{}^0\!\rho\rho}\right)}{\sqrt{({}^0\Delta z)^2+\rho^2+({}^0\!\rho)^2+2\,{}^0\!\rho\rho\operatorname{ch}\eta}}\right]_{\varepsilon}^{\infty}\\
&-\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathrm{d}\eta\frac{-\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}^2\eta}\,\mathrm{S}\left({}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{{}^0\!\rho\rho}-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{{}^0\!\rho\rho}\right)\cos(\omega_0\tau)+{}^0\!p^\rho\,\frac{\mathrm{S}}{{}^0\!\rho}\,\cos(\omega_0\tau)}{\sqrt{({}^0\Delta z)^2+\rho^2+({}^0\!\rho)^2+2\,{}^0\!\rho\rho\operatorname{ch}\eta}}\\
&+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathrm{d}\eta\frac{\mathrm{S}\;{}^0\!\rho\rho\left({}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{{}^0\!\rho\rho}-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{{}^0\!\rho\rho}\right)\cos(\omega_0\tau)}{\sqrt{(({}^0\Delta z)^2+\rho^2+({}^0\!\rho)^2+2\,{}^0\!\rho\rho\operatorname{ch}\eta)^3}}\\
&-\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathrm{d}\eta\frac{\frac{-\omega_0\sin(\omega_0\tau)}{\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\,\mathrm{S}\left({}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{{}^0\!\rho\rho}-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{{}^0\!\rho\rho}\right)}{\sqrt{({}^0\Delta z)^2+\rho^2+({}^0\!\rho)^2+2\,{}^0\!\rho\rho\operatorname{ch}\eta}}
\end{aligned}
$$

Povrchový člen se odečte s regularizací $\frac{\Lambda}{\operatorname{sh}\varepsilon}$, druhý integrál se odečte s příslušnými členy (3.57). Čtvrtý integrál upravíme s přihlédnutím ke vztahu mezi η a τ (3.51). Výsledný integrál již neobsahuje divergentní členy, takže provedeme limitu $\varepsilon\to 0$ a získáme tvar časové složky čtyřpotenciálu

$$
\begin{aligned}
A_t^{\mathrm{R}}(x)=\frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_{0}^{\infty}&\frac{\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\rho\,{}^0\!\rho\left(-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{\rho\,{}^0\!\rho}+{}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{\rho\,{}^0\!\rho}\right)\cos(\omega_0\tau)}{\sqrt{(\,{}^0\Delta z^2+\rho^2+\,({}^0\!\rho)^2+2\rho\,{}^0\!\rho\operatorname{ch}\eta)^3}}\\
&+\frac{{}^0\!p^\varphi\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\varphi}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\cos(\omega_0\tau)+\frac{\omega_0\,\rho\,{}^0\!\rho}{\tau-t}\sin(\omega_0\tau)\,\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\left(-{}^0\!p^z\frac{{}^0\Delta z}{\rho\,{}^0\!\rho}+{}^0\!p^\rho\frac{\rho\operatorname{ch}\eta+{}^0\!\rho}{\rho\,{}^0\!\rho}\right)}{\sqrt{\,{}^0\Delta z^2+\rho^2+\,({}^0\!\rho)^2+2\rho\,{}^0\!\rho\operatorname{ch}\eta}}\,\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Konečný tvar čtyřpotenciálu je

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{R}}_{t}(x) &= \frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\eta\left[\frac{\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\,(-{}^0p^z\,{}^0\Delta z + {}^0p^\rho\rho\,\mathrm{ch}\,\eta + {}^0\rho)\cos(\omega_0\tau)}{\sqrt{({}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta)^3}}\right. \\
&\quad + \frac{{}^0p^\varphi\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\varphi}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\cos(\omega_0\tau)}{\sqrt{{}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}} \\
&\quad \left. + \frac{\omega_0\,\sin(\omega_0\tau)\,\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\,({}^0p^z\,{}^0\Delta z - {}^0p^\rho\rho\,\mathrm{ch}\,\eta - {}^0\rho)}{{}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}\right] \qquad (3.59) \\
A^{\mathrm{R}}_{z}(x) &= -\frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi){}^0p_z\,\omega_0\sin(\omega_0\tau)}{\sqrt{{}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}}\,, \qquad (3.60) \\
A^{\mathrm{R}}_{\mu}(x) &= +\frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{ch}\,\eta\,\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi)+i\,\mathrm{Sh}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\,\mathrm{sh}\,\eta}{\sqrt{{}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}}\,{}^0p_\mu\,\omega_0\sin(\omega_0\tau), \qquad (3.61) \\
A^{\mathrm{R}}_{\bar\mu}(x) &= +\frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{ch}\,\eta\,\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi)-i\,\mathrm{Sh}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\,\mathrm{sh}\,\eta}{\sqrt{{}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}}\,{}^0p_{\bar\mu}\,\omega_0\sin(\omega_0\tau), \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

nebo ekvivalentně

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{R}}_{\rho}(x) &= \frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{ch}\,\eta\,\mathrm{S}(\eta,{}^0\Delta\varphi)}{\sqrt{{}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}}\,{}^0p_\rho\,\omega_0\sin(\omega_0\tau), \qquad (3.63) \\
A^{\mathrm{R}}_{\varphi}(x) &= \frac{\nu}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{Sh}(\eta,{}^0\Delta\varphi)\,\mathrm{sh}\,\eta}{\sqrt{{}^0\Delta z^2+\rho^2+({}^0\rho)^2+2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}}\,{}^0p_\varphi\,\omega_0\sin(\omega_0\tau). \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

3.2.3 Limita nulové frekvence

Pro kontrolu správnosti dosavadních výpočtů provedeme limitu $\omega_0 \to 0$ – ta by se měla shodovat s výsledkem 3.10 v [2], tedy s polem statického dipólu. Fáze oscilací dipólu (3.4) jsou zvoleny tak, aby pro $\omega_0 \to 0$ byly náboje v maximální vzdálenosti určené jejich amplitudou.

Snadno se přesvědčíme, že prostorová část díky vlastnostem sinu v souladu s [2] vymizí, zatímco časová složka (3.59) přechází na

$$A_t^{\mathrm{R}}(x) = \frac{\nu}{8\pi^2} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\eta \left(\frac{\mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi)\,(-{}^0p^z\,{}^0\Delta z + {}^0p^\rho\,(\rho\,\mathrm{ch}\,\eta + {}^0\rho))}{\sqrt{({}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta)}^3} + \frac{{}^0p^\varphi \frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\varphi}(\eta, {}^0\Delta\varphi)}{\sqrt{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta}} \right), \tag{3.65}$$

což se (až na jinou definici amplitudy dipólového momentu ${}^0p^\varphi$) shoduje s 3.10 [2].

Kapitola 4

Speciální případy řešení

Integrály (3.60)–(3.62), (3.59) pravděpodobně analyticky řešit nelze. Zabýval jsem se tedy možnosti vyřešit některé speciální případy. V zásadě jsou dvě možnosti rozvojů: buďto zkoumáme limitu ${}^0\rho \to \infty$, která odpovídá tomu, že dipól budící elektromagnetické vlny je velmi vzdálený od struny, nebo limitu ${}^0z \to \infty$. Ta je snazší a odpovídá tomu, že dipól je vzdálený podél osy určené strunou. Elektromagnetické vlnění se tedy šíří podél struny.

Již nyní uvedu, že ani jeden z těchto rozvojů se mi nepodařilo analyticky zcela vyřešit. (Nejjednodušší rozvoj, ${}^0z \to \infty$, je spočten až na integrační konstantu vzhledem k ${}^0\Delta\varphi$ v integrálu (4.43)) . Tato kapitola tedy shrnuje přístupy, kterými jsem se snažil integrály spočíst. Pro zjednodušení se v dalším textu omezím na to, že uvedu problematické integrály bez konstant nedůležitých pro výpočet. U integrálů, které jsou řešitelné snadno, jen uvedu odkaz na řešení buďto podle [3], nebo [2].

Nejprve shrňme problematické členy integrálů (3.60)–(3.62), (3.59)

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\sin(\omega_0 \tau)}{\sqrt{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta}} \ \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ , \tag{4.1}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\sin(\omega_0 \tau) \operatorname{ch}\eta}{\sqrt{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta}} \ \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ , \tag{4.2}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\sin(\omega_0 \tau) \operatorname{sh}\eta}{\sqrt{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta}} \ \mathrm{Sh}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ , \tag{4.3}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\cos(\omega_0 \tau)}{\sqrt{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta}} \ \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \varphi'}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ , \tag{4.4}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\sin(\omega_0 \tau)}{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta} \ \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ , \tag{4.5}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\sin(\omega_0 \tau) \operatorname{ch}\eta}{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta} \ \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ , \tag{4.6}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\cos(\omega_0 \tau)}{\sqrt{\left({}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta\right)^3}} \ \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ , \tag{4.7}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \frac{\cos(\omega_0 \tau) \operatorname{ch}\eta}{\sqrt{\left({}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta\right)^3}} \ \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi) \ . \tag{4.8}$$

Podle (3.51) je

$$\tau = t - \sqrt{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\, {}^0\rho \operatorname{ch}\eta} \ . \tag{4.9}$$

Problém s řešitelností těchto integrálů spočívá především v tom, že se v nich vyskytuje zároveň netriviální racionální výraz v $\operatorname{ch}\eta$, funkce $\operatorname{ch}\eta\nu$ obsažený ve funkcích S, Sh a funkce sin nebo cos s komplikovaným argumentem. Pokusíme-li se rozvinout některou z těchto funkcí do Taylorovy řady, integrovat člen po členu a opět řadu sečíst, narazíme na problém, neboť Taylorova řada nekonverguje stejnoměrně na intervalu $(0, \infty)$. Integrál se sumou nelze zaměnit.

4.1 Rozvoj pro ${}^0z \to \infty$

Rozvineme-li v integrálech (4.1)–(4.8) funkce pro ${}^0z \to \infty$ (tedy zdroj záření je vzdálený ve směru podél struny), můžeme nahradit

$$\sqrt{{}^0\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\rho)^2 + 2\rho\,{}^0\rho\,\mathrm{ch}\,\eta} \approx {}^0\Delta z, \tag{4.10}$$

$$\tau \approx t - {}^0\Delta z. \tag{4.11}$$

a integrály nabudou formy

$$\frac{\sin\omega_0\,(t - {}^0\Delta z)}{{}^0\Delta z} \int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi)\ , \tag{4.12}$$

$$\frac{\sin\omega_0\,(t - {}^0\Delta z)}{{}^0\Delta z} \int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \mathrm{ch}\,\eta\,\mathrm{S}(\eta, {}^0\Delta\varphi)\ , \tag{4.13}$$

$$\frac{\sin\omega_0\,(t - {}^0\Delta z)}{{}^0\Delta z} \int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \mathrm{sh}\,\eta\,\mathrm{Sh}(\eta, {}^0\Delta\varphi)\ , \tag{4.14}$$

$$\frac{\cos\omega_0\,(t - {}^0\Delta z)}{{}^0\Delta z} \int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\varphi'}(\eta, {}^0\Delta\varphi)\ . \tag{4.15}$$

Integrály (4.5)–(4.8) dávají v této limitě stejný výsledek jako již některý z předešlých integrálů, jen s jinou mocninou ${}^0\Delta z$.

Podle (B3), (B5) a (B9) v [2] platí

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi) = \frac{2\pi}{\nu}\left(-\nu + k_\mathrm{f} - k_\mathrm{i} + 1\right)\ , \tag{4.16}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \mathrm{ch}\,\eta\ \mathrm{S}(\eta, \Delta\varphi) = -\frac{2\pi}{\nu}\sum_{k=k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{f}} \cos\left(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) \tag{4.17}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\partial\,\mathrm{S}}{\partial\varphi'}(\eta, {}^0\Delta\varphi) = 0\ . \tag{4.18}$$

Integrál (4.14) je třeba vyřešit. Aplikací per-partes jej můžeme upravit na tvar

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \mathrm{sh}\,\eta\ \mathrm{Sh}(\eta, \Delta\varphi) = \Big[\mathrm{ch}\,\eta\ \mathrm{Sh}(\eta, \Delta\varphi)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \mathrm{ch}\,\eta\,\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{Sh}(\eta, \Delta\varphi). \tag{4.19}$$

Aby integrál byl dobře definován, je nutné, aby $\nu > 1$, což odpovídá právě deficitnímu úhlu. Vyčíslíme derivaci

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{Sh}(\eta, \Delta\varphi) = -\frac{\mathrm{sh}\,\eta\nu\ \ \mathrm{sh}\,\nu\,(\pi - \Delta\varphi)}{\left(\mathrm{ch}\,\nu\eta - \cos\nu\,(\pi - \Delta\varphi)\right)^2} - \frac{\mathrm{sh}\,\eta\nu\ \ \mathrm{sh}\,\nu\,(\pi + \Delta\varphi)}{\left(\mathrm{ch}\,\nu\eta - \cos\nu\,(\pi + \Delta\varphi)\right)^2} \tag{4.20}$$

Obdobné integrály jsou podobné integrálům 3.514.1-3.514.4 v [3], proto představují nadějný výsledek pro další výpočty. Přesto se mi jej nepodařilo rozřešit.

Dosazením (4.16)–(4.18) do (3.59), (3.60), (3.63) vyjádříme

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{R}}_t(x) &= (-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1)\left({}^0\!\rho - {}^0\!p^z\, {}^0\Delta z\right) \frac{\cos(\omega_0\tau') - \omega_0\, \sin(\omega_0\tau')^0\Delta z}{4\pi\, {}^0\Delta z^3} \\ &\quad - \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \cos\left(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) {}^0\!p^\rho \rho \frac{\cos(\omega_0\tau') - \omega_0\, \sin(\omega_0\tau')\, {}^0\Delta z}{4\pi\, {}^0\Delta z^3} \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$A^{\mathrm{R}}_z(x) = -\frac{1}{4\pi}(-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1)\frac{{}^0\!p_z\, \omega_0 \sin\left(\omega_0\tau'\right)}{{}^0\Delta z}, \tag{4.22}$$

$$A^{\mathrm{R}}_\rho(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \cos\left(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\frac{{}^0\!p_\rho\, \omega_0 \sin\left(\omega_0\tau'\right)}{{}^0\Delta z}, \tag{4.23}$$

kde zavádím značení $\tau' \equiv t - {}^0\Delta z$ (v souladu s (4.11)) abychom zdůraznili, že nejde o funkci integrační proměnné η.

Výpočet z kalibrační podmínky

Jelikož výrazy (4.21)–(4.23) jsou, stejně jako geodetické členy potenciálu (3.27)–(3.30) vyjádřeny již bez integrálů, čistě algebraicky, je možno převést obtížně řešitelný určitý integrál (4.14) přes η na neurčitý integrál přes φ. Rozepíšeme kalibrační podmínku

$$A^\alpha{}_{;\alpha} = 0. \tag{4.24}$$

V cylindrických souřadnicích (1.2) jsou Christoffelovy symboly

$$\Gamma^\rho{}_{\varphi\varphi} = -\rho, \quad \Gamma^\varphi{}_{\varphi\rho} = \Gamma^\varphi{}_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho}, \tag{4.25}$$

zbylé jsou nulové. Proto

$$A_{\alpha;\beta}g^{\alpha\beta} = \left(A_{\alpha,\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}A_\lambda\right) g^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.26}$$

přejde na

$$-A_{t,t} + A_{\rho,\rho} + A_{z,z} + A_{\varphi,\varphi}\frac{1}{\rho^2} + \rho\frac{1}{\rho^2}A_\rho = 0. \tag{4.27}$$

Rozepišme jednotlivé derivace v kalibrační podmínce vystupující

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{R}}_{t,t}(x) &= -\left(-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1\right)\left({}^{0}\rho - {}^{0}p^{z}\,{}^{0}\Delta z\right)\omega_0 \frac{\sin(\omega_0\tau') + \omega_0\,\cos(\omega_0\tau')\,{}^{0}\Delta z}{4\pi\,{}^{0}\Delta z^3} \\
&\quad + \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \cos\left(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right){}^{0}p^{\rho}\rho\,\omega_0 \frac{\sin(\omega_0\tau') + \omega_0\,\cos(\omega_0\tau')\,{}^{0}\Delta z}{4\pi\,{}^{0}\Delta z^3} \qquad (4.28)\\
A^{\mathrm{R}}_{\rho,\rho}(x) &= 0, \qquad (4.29)\\
A^{\mathrm{R}}_{z,z}(x) &= \frac{1}{4\pi}\left(-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1\right)\frac{{}^{0}p_z\,\omega_0 \sin\left(\omega_0\tau'\right)}{{}^{0}\Delta z^2}\,. \qquad (4.30)\\
A^{\mathrm{G}}_{t,t}(x) &= \frac{1}{4\pi\,{}^{0}r_k^2}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\Bigg({}^{0}\rho\rho\sin\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\left(\ddot{p}^{\varphi}(t - {}^{0}r_k) + \frac{1}{{}^{0}r_k}\dot{p}^{\varphi}(t - {}^{0}r_k)\right) \\
&\quad + {}^{0}\Delta z\left(\ddot{p}^{z}(t - {}^{0}r_k) + \frac{1}{{}^{0}r_k}\dot{p}^{z}(t - {}^{0}r_k)\right) - \\
&\quad - \left({}^{0}\rho - \rho\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)\left(\ddot{p}^{\rho}(t - {}^{0}r_k) + \frac{1}{{}^{0}r_k}\dot{p}^{\rho}(t - {}^{0}r_k)\right)\Bigg) \qquad (4.31)\\
A^{\mathrm{G}}_{z,z}(x) &= \frac{{}^{0}\Delta z}{4\pi\,{}^{0}r_k^3}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\dot{p}_z(t - {}^{0}r_k) + \frac{{}^{0}\Delta z}{4\pi\,{}^{0}r_k^2}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\ddot{p}_z(t - {}^{0}r_k), \qquad (4.32)\\
A^{\mathrm{G}}_{\rho,\rho}(x) &= \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{{}^{0}\rho\ddot{p}_{\rho}(t - {}^{0}r_k)\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) + \ddot{p}_{\varphi}(t - {}^{0}r_k)\sin\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^{0}r_k^2\,{}^{0}\rho\quad\left(\rho - {}^{0}\rho\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)^{-1}} \\
&\quad + \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{{}^{0}\rho\dot{p}_{\rho}(t - {}^{0}r_k)\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) + \dot{p}_{\varphi}(t - {}^{0}r_k)\sin\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^{0}r_k^3\,{}^{0}\rho\quad\left(\rho - {}^{0}\rho\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)^{-1}}\,, \qquad (4.33)\\
A^{\mathrm{G}}_{\varphi,\varphi}(x) &= -\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{{}^{0}\rho\ddot{p}_{\rho}(t - {}^{0}r_k)\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) - \ddot{p}_{\varphi}(t - {}^{0}r_k)\sin\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^{0}r_k^2\quad\left(\rho - {}^{0}\rho\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)^{-1}} \\
&\quad - \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{{}^{0}\rho\dot{p}_{\rho}(t - {}^{0}r_k)\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) - \dot{p}_{\varphi}(t - {}^{0}r_k)\sin\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^{0}r_k^3\quad\left(\rho - {}^{0}\rho\cos\left({}^{0}\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)^{-1}}\,. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Rozvedeme-li výrazy v limitě $z \to \infty$ a zanedbáme členy vyššího než druhého řádu, zjednoduší se na

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{R}}_{t,t}(x) &= -\left(-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1\right)\left({}^0\!\rho - {}^0\!p^z\,{}^0\Delta z\right)\omega_0 \frac{\sin(\omega_0\tau') + \omega_0\,\cos(\omega_0\tau')^0\Delta z}{4\pi\,{}^0\Delta z^3} \\
&\quad + \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \cos\left(\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right){}^0\!p^\rho \rho\,\omega_0 \frac{\omega_0\,\cos(\omega_0\tau')}{4\pi\,{}^0\Delta z^2} && (4.35)\\
A^{\mathrm{R}}_{\rho,\rho}(x) &= 0, && (4.36)\\
A^{\mathrm{R}}_{z,z}(x) &= \frac{1}{4\pi}\left(-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1\right)\frac{{}^0\!p_z\,\omega_0 \sin\left(\omega_0\tau'\right)}{{}^0\Delta z^2}\,. && (4.37)\\
A^{\mathrm{G}}_{t,t}(x) &= \frac{1}{4\pi\,{}^0\Delta z^2}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\Bigg({}^0\!\rho\rho\sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\ddot{p}^\varphi(t - {}^0\!r_k) \\
&\quad + {}^0\Delta z\,\ddot{p}^z(t - {}^0\!r_k) - \left({}^0\!\rho - \rho\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)\ddot{p}^\rho(t - {}^0\!r_k)\Bigg) \\
A^{\mathrm{G}}_{z,z}(x) &= \frac{1}{4\pi\,{}^0\Delta z^2}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\dot{p}_z(t - {}^0\!r_k) + \frac{1}{4\pi\,{}^0\Delta z}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\ddot{p}_z(t - {}^0\!r_k), && (4.38)\\
A^{\mathrm{G}}_{\rho,\rho}(x) &= \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{{}^0\!\rho\ddot{p}_\rho(t - {}^0\!r_k)\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) + \ddot{p}_\varphi(t - {}^0\!r_k)\sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^0\Delta z^2\,{}^0\!\rho\quad\left(\rho - {}^0\!\rho\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)^{-1}}\,, \\
& && (4.39)\\
A^{\mathrm{G}}_{\varphi,\varphi}(x) &= -\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{{}^0\!\rho\ddot{p}_\rho(t - {}^0\!r_k)\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right) - \ddot{p}_\varphi(t - {}^0\!r_k)\sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^0\Delta z^2\quad\left(\rho - {}^0\!\rho\cos\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)\right)^{-1}}\,. \\
& && (4.40)
\end{aligned}$$

Napíšeme-li nyní kalibrační podmínku (4.27) do členů prvního řádu v ${}^0\Delta z$, obdržíme rovnici

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{{}^0\Delta z}\Bigg(&-\left(-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1\right){}^0\!p_z\,\frac{\omega_0^2}{4\pi}\cos(\omega_0\tau') - \frac{1}{4\pi}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\ddot{p}_z(t - {}^0\!r_k) && (4.41)\\
&+ \frac{1}{4\pi}\sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\ddot{p}_z(t - {}^0\!r_k) + {}^0\Delta z\,A^{\mathrm{R}}_{\varphi,\varphi}\frac{1}{\rho^2} - \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{\dot{p}_\varphi(t - {}^0\!r_k)\sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^0\!\rho\rho}\Bigg).
\end{aligned}$$

Z této rovnice plyne (do prvního řádu rozvoje v ${}^0\Delta z$)

$$A^{\mathrm{R}}_{\varphi,\varphi} = \frac{\rho^2}{{}^0\Delta z}\Bigg(\left(-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1\right){}^0\!p_z\,\frac{\omega_0^2}{4\pi}\cos(\omega_0\tau') - \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}}\frac{{}^0\!p_\varphi\,\omega_0\,\sin(\omega_0\tau')\sin\left({}^0\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^0\!\rho\rho}\Bigg). \tag{4.42}$$

Integrováním této rovnice získáme tvar

$$\begin{aligned} A_\varphi^{\mathrm{R}} &= \frac{\rho^2}{{}^0\!\Delta z}\Bigg((-\nu + k_{\mathrm{f}} - k_{\mathrm{i}} + 1)\,{}^0\!\Delta\varphi\,{}^0\!p_z\,\frac{\omega_0^2}{4\pi}\cos(\omega_0\tau') \\ &+ \sum_{k=k_{\mathrm{i}}}^{k_{\mathrm{f}}} \frac{{}^0\!p_\varphi\,\omega_0\,\sin(\omega_0\tau')\cos\left({}^0\!\Delta\varphi + 2\pi k/\nu\right)}{4\pi\,{}^0\!\rho\rho}\Bigg) + C(\rho, {}^0\!\rho, {}^0\!\Delta z), \end{aligned} \tag{4.43}$$

kde jsme automaticky určili závislost na ${}^0\!\varphi$ záměnou $\varphi \to {}^0\!\Delta\varphi$ v prvním členu. (K tomuto kroku jsme oprávněni, protože v Greenově funkci φ nikdy nevystupuje samostatně.)

Jelikož jsme výraz (4.43) získali z kalibrační podmínky (4.27) jako neurčitý integrál, je $C(\rho, {}^0\!\rho, {}^0\!\Delta z)$ integrační konstanta nezávislá na φ (a tedy, protože ve všech integrovaných výrazech vystupuje φ jen prostřednictvím ${}^0\!\Delta\varphi$, nezávislá na ${}^0\!\varphi$.) Stále však může záviset na ρ, ${}^0\!\rho$, ${}^0\!\Delta z$, což znamená, že (4.43) není úplným vyjádřením A_φ^{R}, jen omezuje jeho možný tvar.

4.2 Rozvoj pro ${}^0\!\rho \to \infty$

Pro ${}^0\!\rho \to \infty$ již nelze zanedbat členy obsahující integrační proměnnou ve výrazu s odmocninou

$$\sqrt{{}^0\!\Delta z^2 + \rho^2 + ({}^0\!\rho)^2 + 2\rho\,{}^0\!\rho\operatorname{ch}\eta} \approx \sqrt{({}^0\!\rho)^2 + 2\rho\,{}^0\!\rho\operatorname{ch}\eta}\,, \tag{4.44}$$

$$\tau \approx t - \sqrt{({}^0\!\rho)^2 + 2\rho\,{}^0\!\rho\operatorname{ch}\eta}\,. \tag{4.45}$$

Žádnou z funkcí $\operatorname{sh}\eta$, $\operatorname{ch}\eta$, $\sin\omega_0\tau$ nelze rozvinout kolem nekonečna v proměnné ${}^0\!\rho$ tak, aby byly členy vyšších řádů zanedbatelné (funkce mají v nekonečnu významnou singularitu). Rovněž přesné rozepsání některé z těchto funkcí do nekonečné řady i integrování člen po členu není možné, protože nelze splnit podmínky pro větu o záměně sumy a integrálu. Integrály se tedy nezjednoduší.

Kapitola 5

Výpočet z Greenovy funkce v integrální formě

Výpočet čtyřpotenciálu z Greenovy funkce v integrálním tvaru (1.10) se jevil jako velmi nadějná metoda – zaměníme-li totiž pořadí integrace, harmonickou časovou závislost dipólového momentu můžeme v integrálu přes jednu z proměnných nahradit δ-funkcí, které zruší některý z dalších integrálů. V této části tuto metodu předvedeme na výpočtu časové složky čtyřpotenciálu tak, že se vzniklou δ-funkcí vyintegrujeme dvě různé možné proměnné.

Vzhledem k tomu, že integrály časové části nešly vyjádřit zcela, neuvádím integraci prostorové části, které by se počítaly obdobně, jako složka časová.

5.1 Výpočet časové složky čtyřpotenciálu

Dosadíme (1.10) a (2.5) do (3.7)

$$A_t^{\mathrm{R}}(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x' \frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}+} \mathrm{d}\lambda\,\lambda \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\kappa \int\limits_{\mathrm{c_{ret}}} \mathrm{d}\omega \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau \frac{e^{-i(-\omega\Delta t+\kappa\Delta z+\nu n\Delta\varphi)}}{-\omega^2+\kappa^2+\lambda^2}$$
$$\times \mathrm{J}_{|\nu n+\sigma|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n+\sigma|}(\lambda\rho')^{(\mathrm{r})}\nabla_i\delta\left(x'|x_0(\tau)\right) p^i\, {}^0u_t(\tau) \tag{5.1}$$

Nyní jednak nahradím časovou složky čtyřrychlosti ${}^0u_t = -1$ (dipól stojí), jednak provedu per partes na derivaci se změnou znaménka (celkové znaménko se tedy nezmění). Rovněž dosadím $\sigma = 0$, protože tato složka Greenovy funkce vystupuje v časové části.

$$A_t^{\mathrm{R}}(x) = -\frac{\partial}{\partial x'^i}\left[\frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}+} \mathrm{d}\lambda\,\lambda \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\kappa \int\limits_{\mathrm{c_{ret}}} \mathrm{d}\omega \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau\, \frac{e^{-i(-\omega\Delta t+\kappa\Delta z+\nu n\Delta\varphi)}}{-\omega^2+\kappa^2+\lambda^2}\right.$$
$$\left.\left.\times \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho')p^i\right]\right|_{x'={}^0x(\tau),\ t'=\tau} \tag{5.2}$$

Také jsme přeintegrovali přes x', tedy přecházejí $t' \to \tau$, $x'^i \to {}^0\!x^i$. Připomeňme zavedení (3.4).

$$p^i = {}^0\!p^i \cos\omega_0\tau = {}^0\!p^i \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega_0\tau} + e^{i\omega_0\tau}\right) \tag{5.3}$$

$$\Delta t = t - \tau,\ \Delta z = z - z',\ \Delta\varphi = \varphi - \varphi',\ \ldots, \tag{5.4}$$

$${}^0\Delta z = z - z_0,\ {}^0\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0,\ \ldots. \tag{5.5}$$

z čehož ovšem nahradím jen Δt. Dosadím časovou závislost dipólu

$$\begin{aligned} A_t^{\mathrm{R}}(x) = -{}^0\!p^i \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_0^i} \Bigg[&\frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}+} \mathrm{d}\lambda\,\lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\kappa \int_{c_{\mathrm{ret}}} \mathrm{d}\omega \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau\, \frac{e^{-i\left(-\omega(t-\tau)+\kappa\,{}^0\Delta z+\nu n\,{}^0\Delta\varphi\right)}}{-\omega^2+\kappa^2+\lambda^2} \\ &\times \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0)\left(e^{-i\omega_0\tau} + e^{i\omega_0\tau}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{5.6}$$

Využiji identitu $\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\, e^{iq(x-x_0)}$ pro vyintegrování přes τ.

$$\begin{aligned} A_t^{\mathrm{R}}(x) = -{}^0\!p^i \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_0^i} \Bigg[&\frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}+} \mathrm{d}\lambda\,\lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\kappa \int_{c_{\mathrm{ret}}} \mathrm{d}\omega \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau\, \frac{\left(e^{-i(\omega_0+\omega)\tau} + e^{i(\omega_0-\omega)\tau}\right)}{-\omega^2+\kappa^2+\lambda^2} \\ &\times \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0) e^{-i\left(-\omega t+\kappa\,{}^0\Delta z+\nu n\,{}^0\Delta\varphi\right)}\Bigg] \end{aligned} \tag{5.7}$$

Tedy

$$\begin{aligned} A_t^{\mathrm{R}}(x) = -{}^0\!p^i \pi \frac{\partial}{\partial x'^i} \Bigg[&\frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}+} \mathrm{d}\lambda\,\lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\kappa \int_{c_{\mathrm{ret}}} \mathrm{d}\omega\, \frac{\delta(\omega_0+\omega)) + \delta(\omega_0-\omega))}{-\omega^2+\kappa^2+\lambda^2} \\ &\times \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0) e^{-i\left(-\omega t+\kappa\,{}^0\Delta z+\nu n\,{}^0\Delta\varphi\right)}\Bigg] \end{aligned} \tag{5.8}$$

Regularizace

Pro vymezení integrační cesty c_{ret} se užívá následující regularizace (Pod všemi výrazy obsahujícími ε, ε' rozumíme, že na závěr provedeme limitu $\varepsilon, \varepsilon' \to 0+$ a že členy $\mathcal{O}(\varepsilon)$, $\mathcal{O}(\varepsilon')$ lze zanedbat. Očárkováním ε značíme zahrnutí nepodstatné konstanty do ε', nebo obecně přechod k jiné proměnné vyjadřující stejnou regularizaci.)

$$\int_{c_{\mathrm{ret}}} \mathrm{d}\omega \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{-\omega^2+\kappa^2+\lambda^2} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{-(\omega-i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}, \tag{5.9}$$

protože potom pól leží v horní polorovině, po které integruji je-li $t > \tau$.

Nechám tedy stát ε ve výrazu dole a integruji přes ω přes $\mathbb{R}$. Infinitezimální kladné ε mi zachová informaci o tom, jak integrovat dále, abych zůstal v regularizaci odpovídající retardované Greenově funkci.

$$A_t^{\mathrm{R}}(x) = -\frac{\partial}{\partial x_0^i}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}+}\mathrm{d}\lambda\,\lambda\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\kappa\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}}{-(-\omega_0-i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}+\frac{e^{i\omega_0 t}}{-(\omega_0-i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}\right)\right.$$
$$\left.\times \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0)e^{-i\left(\kappa\,{}^0\Delta z+\nu n\,{}^0\Delta\varphi\right)}\right]\frac{{}^0p^i\nu\pi}{(2\pi)^3} \quad (5.10)$$

5.1.1 Integrace napřed podle λ

Podle 6.541.1 v [3] platí

$$\int_0^\infty x\,\mathrm{J}_\nu(ax)\mathrm{J}_\nu(bx)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+c^2} = \mathrm{I}_\nu(bc)\mathrm{K}_\nu(ac),\ \ 0<b<a, \mathrm{Re}\,c>0,\ \ \mathrm{Re}\,\nu>-1 \quad (5.11)$$

Splnění podmínky pro ν je zaručeno absolutní hodnotou, navíc je vidět, že nám podmínka kladné reálné části určí znaménko odmocniny právě díky tomu, že platí

$$\mathrm{Re}\,c_1 = \mathrm{Re}\sqrt{-(\omega_0+i\varepsilon)^2+\kappa^2} > 0, \quad (5.12)$$

$$\mathrm{Re}\,c_2 = \mathrm{Re}\sqrt{-(\omega_0-i\varepsilon)^2+\kappa^2} > 0. \quad (5.13)$$

Pro $|\kappa| > |\omega_0|$ platí

$$c_1(\kappa) \equiv \sqrt{\kappa^2-\omega_0^2} - i\,\varepsilon' \quad (5.14)$$
$$c_2(\kappa) \equiv \sqrt{\kappa^2-\omega_0^2} + i\,\varepsilon' \quad (5.15)$$

Pro $|\kappa| < |\omega_0|$ platí

$$c_1(\kappa) \equiv -i\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2} + \varepsilon', \quad (5.16)$$
$$c_2(\kappa) \equiv i\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2} + \varepsilon'. \quad (5.17)$$

Integrál tak můžeme přepsat do tvaru

$$A_t^{\mathrm{R}}(x) = -\frac{{}^0p^i\nu}{8\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\kappa\,\frac{\partial}{\partial x_0^i}\left[e^{-i\left(\kappa\,{}^0\Delta z+\nu n\,{}^0\Delta\varphi\right)}\right. \quad (5.18)$$
$$\times\left(e^{-i\omega_0 t}\,\mathrm{I}_{|\nu n|}(\rho_{\min}c_1(\kappa))\mathrm{K}_{|\nu n|}(\rho_{\max}c_1(\kappa))\right.$$
$$\left.\left.+\,e^{i\omega_0 t}\,\mathrm{I}_{|\nu n|}(\rho_{\min}c_2(\kappa))\mathrm{K}_{|\nu n|}(\rho_{\max}c_2(\kappa))\right)\right],$$

kde

$$\rho_{\min} = \min(\rho_0, \rho), \quad \rho_{\max} = \max(\rho_0, \rho) \tag{5.19}$$

a $c_1(\kappa)$, $c_2(\kappa)$ jsou podle velikostí κ a ω_0 definovány vztahy (5.14), (5.15), nebo (5.16), (5.17) s tím, že můžeme položit $\varepsilon' = 0$, čímž provedeme limitu $\varepsilon' \to 0+$.

Pro $\kappa \in \mathbb{R} \backslash (-\omega_0; \omega_0)$ je imaginární složka integrandu nulová, pro $\kappa \in (-\omega_0; \omega_0)$ je lichou funkcí v κ, takže integrál je reálný.

Tento integrál dále analyticky pravděpodobně řešit nejde.

5.1.2 Integrace napřed podle κ

Ve tvaru (5.10)

$$\begin{aligned} A_t^{\mathrm{R}}(x) &= -{}^0p^i\,\pi\,\frac{\partial}{\partial x_0^i}\left[\frac{\nu}{(2\pi)^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}+}\mathrm{d}\lambda\,\lambda\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\kappa\;\mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho)\mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0)e^{-i\left(\kappa\,{}^0\Delta z+\nu n\,{}^0\Delta\varphi\right)}\right.\\ &\quad\left.\times\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}}{-(\omega_0+i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}+\frac{e^{i\omega_0 t}}{-(\omega_0-i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{5.20}$$

integruji napřed podle κ – k tomu je potřeba znát informaci o rozložení pólů.

Póly

$\boldsymbol{\omega > \lambda}$

$$\frac{1}{-(\omega_0+i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}: \quad \kappa_{\mathrm{p}_1} = -\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} - i\varepsilon\omega_0, \quad \kappa_{\mathrm{p}_2} = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} + i\varepsilon\omega_0. \tag{5.21}$$

$$\frac{1}{-(\omega_0-i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}: \quad \kappa_{\mathrm{p}_1} = -\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} + i\varepsilon\omega_0, \quad \kappa_{\mathrm{p}_2} = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} - i\varepsilon\omega_0. \tag{5.22}$$

$\boldsymbol{\omega < \lambda}$

$$\frac{1}{-(\omega_0+i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}: \quad \kappa_{\mathrm{p}_1} = -i\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}, \quad \kappa_{\mathrm{p}_2} = i\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}. \tag{5.23}$$

$$\frac{1}{-(\omega_0-i\varepsilon)^2+\kappa^2+\lambda^2}: \quad \kappa_{\mathrm{p}_1} = -i\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}, \quad \kappa_{\mathrm{p}_2} = i\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}. \tag{5.24}$$

Pro ${}^0\Delta z > 0$ sčítám rezidua v pólech v záporné imaginární polorovině komplexní roviny,

ω_0 beru bez újmy na obecnosti kladné

$$\begin{aligned}
A_t^{\mathrm{R}}(x) &= -{}^0\!p^i \pi \frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial x_0^i} \Bigg[\\
&\quad \int_0^{\omega_0} \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho) \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0) e^{-i\nu n\, {}^0\Delta\varphi} \\
&\qquad \times \frac{-\operatorname{sign} {}^0\Delta z}{2\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} \left(e^{-i\omega_0 t} e^{i|{}^0\Delta z|\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} - e^{i\omega_0 t} e^{-i|{}^0\Delta z|\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} \right) \\
&+ \int_{\omega_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho) \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0) e^{-i\nu n\, {}^0\Delta\varphi} \\
&\qquad \times \frac{-\operatorname{sign} {}^0\Delta z}{2i\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\, e^{-|{}^0\Delta z|\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}} \left(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.25}$$

kde pokud dojde ke změně znaménka ${}^0\Delta z$, změní se polorovina ve které integruji a póly změní znaménko (to opravňuje použití $|{}^0\Delta z|$ namísto ${}^0\Delta z$.) Dále upravím na

$$\begin{aligned}
A_t^{\mathrm{R}}(x) &= -{}^0\!p^i \pi i \frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial x_0^i} \Bigg[\\
&\int_0^{\omega_0} \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho) \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0) e^{-i\nu n\, {}^0\Delta\varphi} \frac{\operatorname{sign} {}^0\Delta z}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} \sin\left(\omega_0 t - |{}^0\Delta z| \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} \right) \\
&+ \int_{\omega_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho) \mathrm{J}_{|\nu n|}(\lambda\rho_0) e^{-i\nu n\, {}^0\Delta\varphi} \frac{\operatorname{sign} {}^0\Delta z}{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\, e^{-|{}^0\Delta z|\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t\right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

což je integrál, který se mi nepodařilo vyřešit.

Kapitola 6

Závěr

V práci jsem nalezl distribuční vyjádření pro čtyřproud oscilujícího elektrického dipólu. Na jeho základě a na základě vyjádření Greenovy funkce [2] jsem nalezl vyjádření elektromagnetického pole buzeného dipólem ve tvaru integrálů (3.59)–(3.62). Tyto integrály se mi však nepodařilo algebraicky spočíst. Jejich platnost jsem ověřil provedením limity nulové frekvence a porovnáním s výsledkem z [2].

Jako ilustraci přístupu výpočtu na základě rozkladem Greenovy funkce do vlastních hodnot D'Alembertova operátoru jsem spočetl ekvivalentní vyjádření elektromagnetického pole dipólu ve tvaru integrálů (5.18), (5.26), které rovněž pravděpodobně nelze algebraicky vyjádřit.

Ve čtvrté kapitole jsem rozebral možnost algebraického řešení pro případ dipólu vzdáleného ve směru podél struny a ve směru kolmém na strunu. Byly rozepsány dílčí typy integrálů, které je nutno vyřešit pro rozřešení daného rozvoje – typicky takového druhu, že je nelze algebraicky spočíst. V rozvoji ${}^0\Delta z$ byly integrály (3.59)–(3.62) rozřešeny až na složku $A^{\mathrm{R}}_{\varphi}(x)$, která byla nalezena z kalibrační podmínky (4.24) až na funkci ρ, ${}^0\rho$, ${}^0\Delta z$ nezávislou na ${}^0\Delta\varphi$.

Nalezené výsledky je možno použít např. pro další numerické řešení, nebo jako východisko pro další analytické řešení problémů souvisejících s elektromagnetismem v okolí kosmické struny.

Literatura

[1] Krtouš P.: *Test fields in spacetime of a cosmic string*, nepublikováno (1989).

[2] Krtouš P.: *Electromagnetic field near cosmic string*, Phys.Rev. D74 (2006) 065006.

[3] I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1994) - third edition

[4] M.B. Hindmarsh, T.W.B. Kibble: *Cosmic strings*, Rept.Prog.Phys. 58 (1995) 477-562

[5] Jackson J.D.: *Classical electrodynamics*, 3ed., Wiley, 1999, ISBN 047130932X