

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petr Muzikář

Speciálně relativistické spektrální efekty u gravitačních mikročoček

Ústav teoretické fyziky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.
Studijní program: Fyzika, FOF

2007

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu práce, Mgr. Davidovi Heyrovskému, Ph.D., za jeho všestrannou pomoc s přípravou práce. Trpělivě kontroloval analytické výpočty i zdrojové kódy obou programů. Za to mu náleží můj velký dík. Bez jeho přispění by práce jen stěží mohla vzniknout.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Černošicích dne 9. srpna 2007

Petr Muzikář

Obsah

Obsah	iii
Abstrakty	iv
1 Úvod	1
2 Formulace problému	2
2.1 Zavedení veličin a souřadných soustav	2
2.2 Vlastní formulace úlohy	3
3 Výpočet frekvenčního posuvu	4
3.1 Transformační vztahy mezi soustavami	4
3.2 Čočková rovnice	5
3.3 Dopplerův efekt a vztah pro poměr frekvencí a intenzit	7
3.4 Výpočet frekvenčního poměru	7
4 Numerické výsledky	11
4.1 Rozdíly frekvenčního posuvu u jednotlivých obrazů	11
4.2 Časový vývoj frekvenčního poměru	14
5 Diskuse	22
6 Závěr	24
Literatura	25

Název práce: Speciálně relativistické spektrální efekty u gravitačních mikročoček
Autor: Petr Muzikář
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky MFF UK
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.
e-mail vedoucího: David.Heyrovsky@mff.cuni.cz

Abstrakt

V předložené práci studujeme vliv rychlostí čočky a zdroje na frekvenční posuv a poměr specifických intenzit v průběhu gravitačního mikročočkování. Vyjdeme z rychlostně závislé čočkové rovnice a vyhodnotíme závislost poloh obrazů na úhlové vzdálenosti zdroje od čočky. S použitím speciální teorie relativity odvodíme výraz udávající poměr naměřené a vyzářené frekvence a výraz popisující poměr naměřené a vyzářené specifické intenzity. Ukážeme, že obrazy mají obecně odlišné frekvenční posuvy a intenzity. Následuje numerické vyhodnocení těchto vztahů při několika pevných konfiguracích i při časovém vývoji.

Klíčová slova: gravitační mikročočky, speciální relativita, frekvenční posuv.

Title: Special relativistic spectral effects in gravitational microlensing
Author: Petr Muzikář
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: David.Heyrovsky@mff.cuni.cz

Abstract

In the present work we study the influence of source and lens velocities on the frequency shift and the change of intensities during gravitational microlensing. We start from the velocity-dependent lens equation and illustrate changes of positions of the two images with respect to the angular displacement between source and lens. We derive expressions describing the frequency shift and the shift of intensities using the special theory of relativity. We show that the images generally have different shifts of frequency. We then evaluate the derived expressions in several configurations and illustrate their dependence on time.

Keywords: gravitational microlensing, special relativity, frequency shift.

Úvod

Jev gravitační čočky je dobře známý např. u kvasarů či jiných velmi vzdálených zdrojů záření ve Vesmíru. Pokud mezi pozorovatelem a zdrojem leží např. kupa galaxií, dráha záření se ohýbá a pozorovatel registruje vícenásobné či deformované obrazy zdroje, např. Einsteinův kříž u čočky G2237 + 0305 nebo téměř dokonalý Einsteinův prstenec SDSS J162746.44–005357.5.

Stejný jev, ovšem v menším měřítku, nastává i u hvězd, tj. když zdrojem i čočkou je pouhá hvězda. V tomto případě vznikají obecně dva obrazy zdroje; pouze ve speciálním případě, kdy zdroj je v příslušném čase „za čočkou“, vzniká Einsteinův prstenec.

Při výpočtu polohy obrazů se běžně používá kvazistatické přiblížení: v každém okamžiku se vychází pouze ze vzájemné prostorové konfigurace zdroje, čočky a pozorovatele, přičemž jejich vzájemné rychlosti se zanedbávají, viz [1], str. 423, [2], str. 423. Ovšem rychlosti zdroje i čočky v naší Galaxii činí řádově až 10^{-3} rychlosti světla, takže lze očekávat i speciálně relativistické efekty. Přesnější odvození čočkové rovnice je provedeno v článku [3], str. 28–30. Ukázalo se, že úhel ohybu paprsku závisí na rychlosti čočky. V naší práci na tento výsledek navážeme a budeme studovat vliv rychlosti čočky a zdroje na frekvenční posuv a na poměr pozorované a vyzářené specifické intenzity.

V druhé kapitole popíšeme geometrické parametry úlohy. Přitom zavedeme příslušné souřadné systémy a napíšeme transformační vztahy mezi nimi – ty budou hrát v naší práci podstatnou roli. Následovat bude formulace úlohy.

Ve třetí kapitole nalezneme výraz pro frekvenční posuv způsobený pohybem zdroje a čočky se započtením speciálně relativistických korekcí. Dále stanovíme poměr pozorované a vyzářené specifické intenzity.

Ve čtvrté kapitole numericky vypočítáme časovou závislost frekvenčního posuvu a podílu specifických intenzit při pohybu zdroje a čočky vůči pozorovateli. Budeme sledovat velikost dopplerovského a gravitačního příspěvku k frekvenčnímu posuvu a nalezneme asymptotiku těchto členů.

Následovat bude stručná diskuse výsledků a závěr.

Formulace problému

2.1 Zavedení veličin a souřadných soustav

Ve vzdálenosti D_S od pozorovatele mějme zdrojovou hvězdu, jejíž záření je detekováno pozorovatelem. Fotony putující od zdroje k pozorovateli jsou pod vlivem gravitačních polí hmotných objektů (hvězd apod.) a jejich dráha je obecně zakřivena¹. Nebudeme se zde zabývat problémem v plné šíři, pojednává o něm článek [4]. Předpokládejme pro jednoduchost, že ve vzdálenosti $D_L < D_S$ od pozorovatele a v dostatečně malé úhlové vzdálenosti od zdroje se nachází jediná další hvězda, řekněme jí čočka. Vlivy dalších hvězd apod. zanedbáme. Odlehlost mezi zdrojem a čočkou na nebeské sféře popíšeme pomocí dvoukomponentového úhlu β , jeho orientaci zvolíme od čочки ke zdroji.

Se zdrojem, čočkou i pozorovatelem spojíme různé klidové souřadné soustavy. Při jejich zavedení se budeme držet značení používaného v článku [3]. Veličiny měřené v soustavě pozorovatele označíme čárkou ', v soustavě zdroje hvězdičkou *, v soustavě čочки bez speciálního značení.

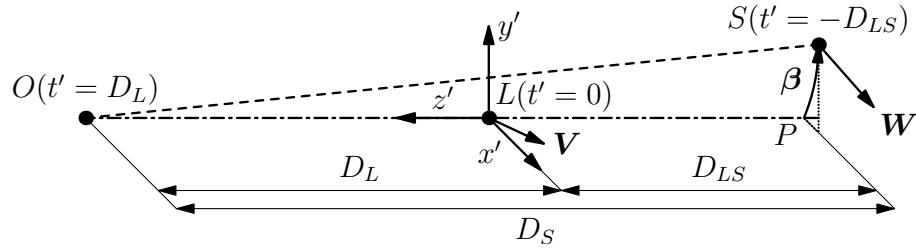
Počátek soustavy pozorovatele v čase $t' = 0$ zvolíme ve středu čочки L , příslušné osy označíme čárkami, viz obr. 1. Pozorovatel O se ve své soustavě nepohybuje, jeho souřadnice jsou tedy $x' = y' = 0$, $z' = D_L$ a jeho čas značíme t' .

Čočka se vůči pozorovateli pohybuje rychlostí² \mathbf{V} , o níž budeme předpokládat, že je konstantní, resp. že její změny za dobu trvání námi sledovaného jevu – gravitační čочки – jsou zanedbatelné. Počátek soustavy čочки zvolíme ve středu čочки, v čase pozorovatele $t' = 0$ tedy soustavy čочки a pozorovatele splývají. Hmotnost čочки označíme M .

Počátek soustavy zdroje v čase $t' \approx -(D_S - D_L) \equiv -D_{LS}$ má v soustavě pozorovatele polohu $\mathbf{r}'_S(t' = -D_{LS}) = (\beta_1 D_S, \beta_2 D_S, -D_{LS})$. To vyžaduje dva komentáře. Zaprvé, čas udáváme pomocí vzdáleností díky tomu, že rychlost světla je v naší konvenci rovna jedné. Zadruhé, velikost úhlu β je řádově úhlová milivteřina či méně, máme tedy trojúhelník OPS s velmi malou odvěsnou PS , což nás opravňuje k aproximaci $|OP| \approx |OS| = D_S$. Takové aproximace budeme bez dalšího komentáře často využívat. Rychlost zdroje v soustavě pozorovatele označíme \mathbf{W} a budeme ji brát za konstantní (ve stejném smyslu jako \mathbf{V}).

¹Přesněji řečeno, fotony se pohybují v zakřiveném prostoročase.

²Všechny velikosti rychlostí budeme brát v jednotkách rychlosti světla c .



Obr. 1: Polohy pozorovatele, čočky a zdroje v příslušných časech. Velikost úhlu β byla pro účely obrázku neúměrně zvětšena.

Nakonec zavedme vektor $\mathbf{n}'_o = (-\theta_1, -\theta_2, 1)/\sqrt{1 + \theta^2}$ popisující směr příletu fotonů po průchodu kolem čočky pozorovateli v čase $t' = D_L$ měřeném v jeho soustavě. Dvourozměrný úhel θ měřený od čočky pak udává fiktivní polohu zdroje – polohu obrazu zdroje vytvořeného gravitační čočkou, viz níže.

2.2 Vlastní formulace úlohy

Máme čočku resp. zdroj ve známých vzdálenostech D_L resp. D_S od pozorovatele, které se pohybují konstantními rychlostmi \mathbf{V} resp. \mathbf{W} vzhledem k pozorovateli. Předpokládáme, že známe úhel β a hmotnost M čočky. V čase $t' = D_L$ je pozorovatelem detekován foton ve směru \mathbf{n}'_o .

Zajímá nás výpočet poměru naměřené a vyzářené frekvence ω'/ω^* jakož i poměr příslušných intenzit I'_ω/I_ω^* v případě, že velikosti rychlostí V, W činí řádově 10^{-3} nebo více, a tedy se již mohou začít projevovat speciálně relativistické efekty. Příspěvek od těchto efektů je zajímavý díky tomu, že při výpočtu poměru frekvencí se běžně používá „kvazistatické“, tj. nerelativistické přiblížení.

Výpočet frekvenčního posuvu

3.1 Transformační vztahy mezi soustavami

Ve speciální teorii relativity je přechod mezi vzájemně se pohybujícími soustavami realizován Lorentzovou maticí. Protože budeme těchto transformací často využívat, explicitně je vypíšeme.

Přechod ze soustavy pozorovatele (čárkované) do soustavy čocky (nečárkované) lze blocích zapsat ve tvaru¹

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \gamma_V & -\gamma_V \mathbf{V} \\ \hline -\gamma_V \mathbf{V} & \mathbb{1} + (\gamma_V - 1) \mathbf{V} \mathbf{V} / V^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

kde γ_V je Lorentzův faktor odpovídající rychlosti V , $\mathbb{1}$ je jednotková matice 3×3 a $\mathbf{V} \mathbf{V}$ značí tenzorový součin (pro odlišení budeme ve skalárních součinech vždy vypisovat tečku). Odvození není složité, známe-li speciální Lorentzovu transformaci. Vektor \mathbf{r}' stačí rozložit na složku rovnoběžnou s rychlostí a provést speciální Lorentzovu transformaci. Složka kolmá k rychlosti se transformuje pomocí zobrazení identity, detailněji viz. [5], str. 301. Inverzní transformace se liší jen znaménkem u rychlosti \mathbf{V} . Přechod ze soustavy pozorovatele do soustavy zdroje je analogický, v posledním vztahu zaměníme \mathbf{V} za \mathbf{W} a (t, \mathbf{r}) za (t^*, \mathbf{r}^*) .

Transformace ze soustavy čocky do soustavy zdroje je o něco složitější, protože nemáme přímo zadání rychlost zdroje v soustavě čocky $\mathbf{U} = d\mathbf{r}_S/dt$. Ale čtyřvektor $(dt, d\mathbf{r}_S)$ lze dle (3.1) vyjádřit pomocí $(dt', d\mathbf{r}'_S)$, kde poměr $d\mathbf{r}'_S/dt' = \mathbf{W}$. Odtud vychází rychlost zdroje měřená v soustavě čocky

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{W} - \gamma_V \mathbf{V} + (\gamma_V - 1) \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{V^2} \mathbf{V}}{\gamma_V (1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{W})}. \quad (3.2)$$

Výpočet je opět explicitně proveden v [5], str. 301. Chceme-li přejít ze soustavy čocky do soustavy zdroje, stačí opět provést záměnu ve vztahu (3.1): $(t', \mathbf{r}') \rightarrow (t, \mathbf{r})$, $(t, \mathbf{r}) \rightarrow (t^*, \mathbf{r}^*)$ a $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$.

¹To, zda složky vektorů jsou zapsány do sloupce či řádku, je zřejmé z kontextu.

3.2 Čočková rovnice

Při průletu fotonu v blízkosti čočky dochází k zakřivení jeho dráhy. Pokud prolétá dostatečně daleko od horizontu čočky (vzhledem k tomu, že jde o hvězdu, a ne např. o černou díru, je tento předpoklad dobře splněn) a pokud vzdálenosti mezi zdrojem, čočkou a pozorovatelem jsou velké (budeme uvažovat řádově jednotky kpc), lze použít běžné aproximace, že dráhu fotonu nahradíme lomenou čarou, přičemž „bod zlomu“ se nachází v bodě, který je z celé dráhy nejbližší čočce – tuto vzdálenost označíme R . Daleko od čočky (u zdroje i u pozorovatele) se foton pohybuje přímočaře.

Proč se zabýváme pohybem fotonu, když nás zajímají frekvence a specifické intenzity? Jak uvidíme níže ve vztahu pro Dopplerův jev, relativní změna frekvence způsobená pohybem zdroje závisí nejen na jeho rychlosti, ale také na směru šíření světla vzhledem k této rychlosti.

Chceme nyní popsat pohyb ohyb dráhy fotonu v naší aproximaci. Označíme asymptotický směr emise fotonu ze zdroje jednotkovým vektorem \mathbf{n}'_s a asymptotický směr příletu fotonu k pozorovateli jednotkovým vektorem \mathbf{n}'_o . Oba necht' jsou měřeny v soustavě pozorovatele.

Velikost úhlu α , o který se dráha fotonu odchýlí od původního směru, neboli úhel sevřený vektory \mathbf{n}'_s a \mathbf{n}'_o , vychází v první aproximaci OTR při zanedbání pohybu čočky (viz [6], str. 169–172)

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 R}, \quad (3.3)$$

kde R je výše zavedená vzdálenost fotonu od čočky při největším přiblížení, jde vlastně o impaktní parametr. Pokud bychom ještě označili impaktní parametr fotonu šířícího se přímočaře od zdroje k pozorovateli vzhledem k čočce písmenem R_S , pak bychom z podobnosti příslušných trojúhelníků snadno dostali „kvazistatickou“ čočkovou rovnici pro velikost R (viz [1], str. 422–423)

$$R^2 - R_S R - \tilde{R}_E^2 = 0, \quad (3.4)$$

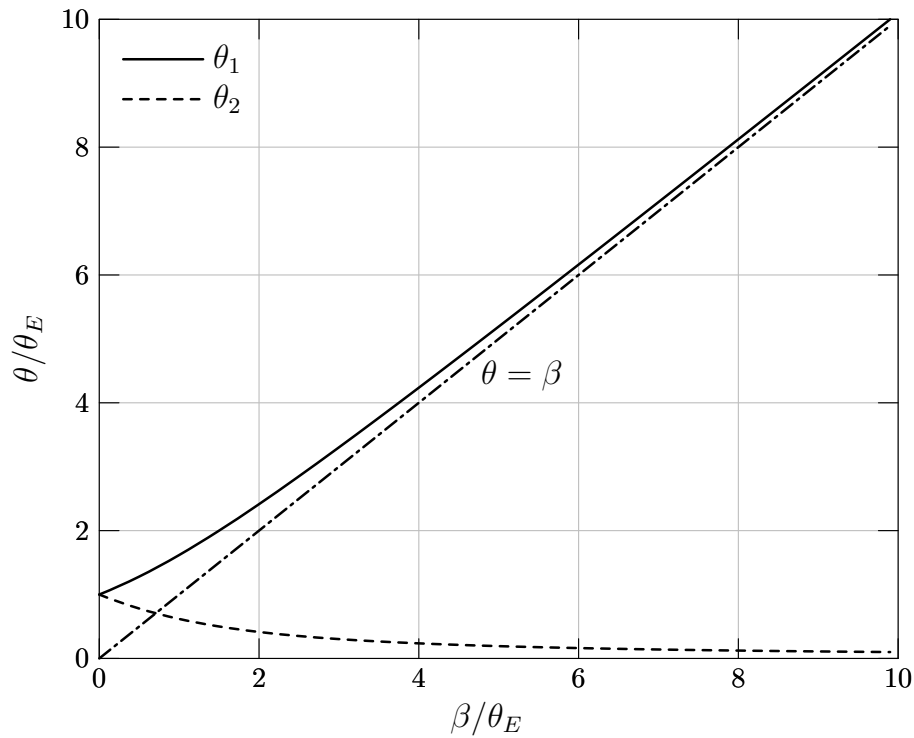
kde jsme označili délkový (kvazistatický) Einsteinův poloměr

$$\tilde{R}_E = D_L \sqrt{\frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_L D_S}} \equiv D_L \tilde{\theta}_E \quad (3.5)$$

a $\tilde{\theta}_E$ se nazývá úhlový Einsteinův poloměr.

Tato čočková rovnice vůbec neobsahuje rychlost čočky vůči pozorovateli, je odvozena za předpokladu, že je tato rychlost zanedbatelná (proto jsme mluvili o kvazistatickosti). Nás však zajímají speciálně relativistické efekty, a je tedy namístě použít STR i při odvození čočkové rovnice. To je detailně provedeno v článcích [3], str. 28–30, a [4], str. 124002-18 až 20. Ukázalo se, čočková rovnice zůstává formálně stejná, jen úhlový Einsteinův poloměr $\tilde{\theta}_E$ je třeba nahradit výrazem

$$\theta_E(\mathbf{V}) \equiv \sqrt{\frac{4GM D_{LS}(1 - V_z)}{c^2 D_L D_S \sqrt{1 - V^2}}}, \quad (3.6)$$



Obr. 1: Závislost úhlových vzdáleností obrazů zdroje od čočky v čase $t' = D_L$ na úhlové vzdálenosti zdroje od čočky v čase $t' = -D_{LS}$. Vidíme, že $\theta_1 \geq 1$ resp. $\theta_2 \leq 1$. Čerchovaně je nakreslena asymptota o rovnici $\theta = \beta$, k níž se blíží θ_1 při rostoucím β .

který je narozdíl od $\tilde{\theta}_E$ rychlostně závislý. Čočkovou rovnici lze zapsat též v úhlových proměnných

$$\theta^2 - \theta\beta - \theta_E^2 = 0, \quad (3.7)$$

její dvě řešení mají tvar

$$\theta_{1,2} = \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\theta_E^2}{\beta^2}} \right] \beta, \quad (3.8)$$

kde úhly θ_1 a θ_2 udávají polohu obrazů zdroje na nebeské sféře měřenou od čočky a uvažovanou v soustavě pozorovatele. Na obr. 1 vidíme úhlové vzdálenosti obrazů zdroje od čočky v čase $t' = D_L$ v závislosti na úhlové vzdálenosti zdroje od čočky v čase $t' = -D_{LS}$. Pro $\beta \rightarrow \infty$ platí ve vedoucím řádu

$$\theta_1 \simeq \beta, \quad (3.9)$$

$$\theta_2 \simeq -\frac{\theta_E^2}{\beta} \frac{\beta}{\beta}, \quad (3.10)$$

neboli jeden z obrazů prakticky splývá s polohou zdroje a druhý naopak téměř splývá s polohou čočky. Při $\beta \rightarrow 0$ jsou oba obrazy ve vzdálenosti θ_E na „opačných stranách“ čočky. V bodě $\beta = 0$ naše čočková rovnice přestává platit – místo dvou obrazů vzniká celý Einsteinův kruh.

3.3 Dopplerův efekt a vztah pro poměr frekvencí a intenzit

Známy vztah pro podélný Dopplerův efekt v případě vzdalujícího se zdroje² světla zní

$$\omega_P = \omega_Z \gamma_v (1 - v) \quad (3.11)$$

a vztah pro příčný Dopplerův jev, kdy rychlost \mathbf{v} je kolmá ke směru šíření signálu \mathbf{n} vzhledem k pozorovateli,

$$\omega_P = \gamma_v \omega_Z, \quad (3.12)$$

lze snadno zobecnit do tří dimenzí:

$$\omega_Z = \omega_P \gamma_v (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.13)$$

Ověřit jej můžeme položením $\mathbf{n} \uparrow \downarrow \mathbf{v}$, což odpovídá vzdalujícímu se zdroji.

V naší situaci můžeme psát

$$\omega = \omega' \gamma_V (1 - \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V}), \quad (3.14)$$

$$\omega^* = \omega \gamma_U (1 - \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{U}), \quad (3.15)$$

kde ω , ω' resp. ω^* jsou frekvence elektromagnetického záření v soustavách čočky, pozorovatele resp. zdroje a \mathbf{n}_s je jednotkový vektor ve směru vyzáření fotonu ze zdroje měřený v soustavě čočky. Z posledních dvou rovnic vyplývá vztah mezi vyzářenou a pozorovanou frekvencí

$$\omega^* = \omega' \gamma_V \gamma_U (1 - \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V})(1 - \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{U}), \quad (3.16)$$

jenž bude základem pro naše výpočty. Pro pohodlí jej necháme v tomto tvaru, i když nakonec budeme chtít poměr ω'/ω^* .

Kromě frekvenčního posuvu budeme počítat rovněž změnu pozorované specifické³ intenzity vzhledem k vyzářené specifické intenzitě. K tomu využijeme Lorenzovský invariant I_ω/ω^3 (viz [7], str. 589). Odtud vyplývá, že

$$\frac{I'_\omega}{I_\omega^*} = \left(\frac{\omega'}{\omega^*} \right)^3, \quad (3.17)$$

kde I'_ω je pozorovaná intenzita na frekvenci ω' v klidové soustavě pozorovatele a I_ω^* je vyzářená intenzita na frekvenci ω^* v klidové soustavě zdroje. Z poměru frekvencí tedy snadno můžeme určit poměr specifických intenzit.

3.4 Výpočet frekvenčního poměru

Vzhledem ke vztahu (3.16) se úloha redukuje na vyjádření závislosti vektoru \mathbf{n}_s na známých veličinách, především na \mathbf{n}'_o . Nejprve transformujeme polohový vektor fotonu u pozorovatele ze soustavy pozorovatele do soustavy čočky, čímž získáme

²Zde uvažujeme obecně: máme na mysli zdroj Z vzdalující se od pozorovatele P rychlostí \mathbf{v} .

³Tj. na dané frekvenci.

vyjádření $\mathbf{n}_o(\mathbf{n}'_o)$. V soustavě čočky pak uijeme vztah mezi polohovým vektorem fotonu u pozorovatele a u zdroje, jenž udává závislost $\mathbf{n}_s(\mathbf{n}_o)$. Z těchto dvou výsledků a vztahu (3.16) již obdržíme výraz pro převrácený poměr frekvencí. Nakonec provedeme jeho inverzi a úloha bude vyřešena. Vypočítat poměr specifických intenzit ze vztahu (3.17) je již triviální.

Provedeme naznačené kroky. Polohu fotonu u pozorovatele (tj. daleko od čočky) měřenou v jeho soustavě můžeme zapsat ve tvaru (viz [3], str. 29)

$$\mathbf{r}'_{po}(t') = \mathbf{r}'_o + \mathbf{n}'_o(t' - D_L), \quad (3.18)$$

kde vektor $\mathbf{r}'_o = (0, 0, D_L)$ udává polohu pozorovatele v jeho soustavě a $\mathbf{n}'_o = (-\boldsymbol{\theta}, 1)/\sqrt{1 + \theta^2}$. Využíváme zde toho, že daleko od čočky je již pohyb fotonu přímočarý. Nyní provedeme Lorentzovu transformaci čtyřvektoru $(t', \mathbf{r}'_{po}(t'))$ do soustavy čočky, čímž získáme čtyřvektor $(t, \mathbf{r}_{po}(t))$. Do $\mathbf{r}_{po}(t)$ dosadíme za čas t' a obdržíme

$$\mathbf{r}_{po}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{n}_o t, \quad (3.19)$$

kde

$$\mathbf{a} = \frac{D_L}{1 - \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V}} \left[\frac{1 - \gamma_V^{-1}}{V^2} (\mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V} - V_z) \mathbf{V} - (1 - V_z) \mathbf{n}'_o \right] + \mathbf{r}'_o, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{n}_o = \frac{1}{1 - \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V}} \left[\gamma_V^{-1} \mathbf{n}'_o + \left(\frac{1 - \gamma_V^{-1}}{V^2} \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V} - 1 \right) \mathbf{V} \right]. \quad (3.21)$$

Dále použijeme vztah mezi asymptotickou polohou fotonu u zdroje $\mathbf{r}_{ps}(t)$ a u pozorovatele $\mathbf{r}_{po}(t)$ (viz [3], str. 29), popisující odchýlení fotonu v gravitačním poli čočky,

$$\mathbf{r}_{ps}(t) = \mathbf{r}_{po}(t) + \frac{4GM}{c^2} \frac{\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{r}_{po}(t) (\mathbf{a} - \mathbf{n}_o \cdot \mathbf{a} \mathbf{n}_o)}{(\mathbf{n}_o \times \mathbf{a})^2}, \quad (3.22)$$

do něhož dosadíme za $\mathbf{r}_{po}(t)$ z rovnice (3.19) a za $\mathbf{r}_{ps}(t)$ z následující rovnice

$$\mathbf{r}_{ps}(t) = \mathbf{a}_s + \mathbf{n}_s t, \quad (3.23)$$

jež vyjadřuje, že u zdroje je dráha fotonu rovněž přímočará. Vektor \mathbf{n}_s bereme jako jednotkový.

Pro zjednodušení výpočtu můžeme již nyní provést určité aproximace. Vektor \mathbf{a} popisuje polohu fotonu nejbližší u čočky, jeho směr je přibližně kolmý na spojnici pozorovatel-čočka, naopak vektor \mathbf{n}_o míří prakticky od čočky k pozorovateli. Můžeme tedy čekat, že skalární součin $\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{a}$ bude malý. Výpočtem se přesvědčíme, že

$$\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{a} = \frac{D_L(n'_{oz} - 1)}{\gamma_V(1 - \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V})} \approx -\frac{D_L \theta^2}{2\gamma_V(1 - \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{V})}, \quad (3.24)$$

kde v členu $n'_{oz} - 1 = 1/\sqrt{1 + \theta^2} - 1$ jsme provedli rozvoj do vedoucího řádu v proměnné $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$. Vzhledem k tomu, že velikost θ je ve fyzikálně zajímavých situacích⁴ řádově několik úhlových milivteřin, můžeme člen se skalárním součinem

⁴Tj. kdy dochází k pozorovatelnému efektu gravitační čočky.

$\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{a}$ ve vztahu (3.22) zanedbat. Totéž můžeme udělat i ve jmenovateli, rozepíšeme-li $(\mathbf{n}_o \times \mathbf{a})^2 = a^2 - (\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{a})^2 \approx a^2$, kde $a = |\mathbf{a}|$.

Srovnáním koeficientů u t potom získáme výraz pro \mathbf{n}_s

$$\mathbf{n}_s = \mathbf{n}_o + \frac{4GM}{c^2} \frac{\mathbf{a}}{a^2}, \quad (3.25)$$

kde \mathbf{a} resp. \mathbf{n}_o jsou dány vztahy (3.20) resp. (3.21). Nyní následuje elementární, ovšem netriviální část výpočtu: dosazení posledního výrazu do vztahu (3.16) a jeho úpravy. Na vhodných místech opět použijeme rozvoj do vedoucího řádu v θ , v rychlostech naopak zatím žádné aproximace neděláme. Výsledek lze zapsat ve tvaru⁵

$$\frac{\omega^*}{\omega'} = \gamma_W (1 - \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{W}) \left[1 - \frac{4GM\gamma_V (1 - V_z) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp - (1 - W_z) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{V}_\perp}{c^2 D_L \theta \theta (1 - W_z)} \right], \quad (3.26)$$

kde \mathbf{W}_\perp a \mathbf{V}_\perp jsou průměty vektorů \mathbf{W} a \mathbf{V} do roviny nebe.

Před hranatou závorkou posledního výrazu stojí člen, jenž evidentně popisuje dopplerovský frekvenční posuv způsobený pohybem zdroje vůči pozorovateli. Všimněme si, že tento člen také obsahuje závislost na existenci čočky: díky ní se mění směr příletu fotonu k pozorovateli \mathbf{n}'_o .

Výraz v hranatých závorkách představuje příspěvek k frekvenčnímu posuvu způsobený ohybem dráhy fotonu v gravitačním poli čočky, jeho velikost je dána především členem

$$\frac{4GM}{c^2 D_L \theta} \equiv \frac{2R_g}{R}, \quad (3.27)$$

neboli poměrem dvojnásobku gravitačního (Schwarzschildova) poloměru čočky a impaktního parametru fotonu míjejícího čočku. Pro běžné hvězdy je gravitační poloměr hluboko pod povrchem, což zaručuje, že v reálných podmínkách je výše uvedený faktor malý, např. pro čočku o hmotnosti a velikosti Slunce a foton prolétající těsně kolem povrchu fotosféry by vyšel zhruba $4 \cdot 10^{-6}$.

Zajímavá situace nastává, když $\mathbf{V} = \mathbf{W}$: „gravitační část“ v tomto řádu přiblížení úplně vymizí a zůstane pouze dopplerovský člen. Tento výsledek je v souladu se vztahem (3.16) vzhledem k $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Gravitační člen taktéž vymizí, pokud \mathbf{V} a \mathbf{W} mají nenulové pouze z -ové složky.

Abychom získali poměr ω'/ω^* rozepsaný do příspěvků jednotlivých členů, provedeme rozvoj do prvního řádu v proměnné θ a v gravitačním členu

$$\frac{\omega'}{\omega^*} = \frac{1}{\gamma_W (1 - W_z)^2} \left\{ 1 - W_z - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp + \frac{4GM\gamma_V}{c^2 D_L \theta} \left[(1 - V_z) \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp}{\theta} - (1 - W_z) \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{V}_\perp}{\theta} \right] \right\}. \quad (3.28)$$

Tento vztah zůstává přesný v rychlostech a platí dobře pro dostatečně malé velikosti úhlu θ . Na druhou stranu nesmí $\theta \rightarrow 0$, protože v tom případě výraz diverguje.

Ve složené závorce výrazu (3.28) rozpoznáváme skalární součin $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp$ pocházející z Dopplerova vztahu a gravitační člen. Jak uvidíme níže, první z nich převažuje pro větší⁶ hodnoty θ , gravitační člen převládá pro velmi malé θ .

⁵ z -ová komponenta vektoru $\boldsymbol{\theta}$ je brána jako nulová.

⁶Ale stále dost malé kvůli použitým rozvojem.

Výpočet poměru specifických intenzit je již snadný, podle (3.17) za použití analogických rozvoju jako u posledního výrazu vychází

$$\frac{I'_\omega}{I_\omega^*} = \frac{1}{\gamma_W^3(1 - W_z)^4} \left\{ 1 - W_z - 3\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp + \frac{12GM\gamma_V}{c^2 D_L \theta} \left[(1 - V_z) \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp}{\theta} - (1 - W_z) \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{V}_\perp}{\theta} \right] \right\}. \quad (3.29)$$

O příspěvcích jednotlivých členů lze udělat podobně závěry jako u poměru frekvencí.

Numerické výsledky

4.1 Rozdíly frekvenčního posuvu u jednotlivých obrazů

Než se budeme zabývat časovým vývojem frekvenčního posuvu, podíváme se na problém staticky, tj. pro danou konfiguraci poloh čočky a zdroje a dané rychlosti vypočítáme polohy obrazů a u každého z nich příslušný frekvenční posuv a poměr specifických intenzit.

Jde vlastně jen o aplikaci výše uvedených vztahů. Stačí vyřešit čočkovou rovnicí (3.7), čímž získáme dvě hodnoty θ_1, θ_2 , a ty pak dosadíme do vztahu (3.28). Výpočet ω'/ω^* a I'_ω/I_ω^* je potom již triviální. K numerickému řešení jsme použili jazyk C, zdrojový kód je v souboru `pomer.c`.

Hmotnost čočky volíme rovnou hmotnosti Slunce M_\odot , vzdálenost čočky od pozorovatele $D_L = 8$ kpc, vzdálenost zdroje od pozorovatele $D_S = 10$ kpc, což odpovídá hvězdám v naší Galaxii. Tyto hodnoty nebudeme dále měnit.

Vliv rychlostí \mathbf{V} a \mathbf{W} na velikost frekvenčního posuvu jsme již kvalitativně popsali u vztahu (3.28), nyní probereme konkrétní číselné hodnoty. Pro jednoduchost zvolíme $\boldsymbol{\beta} = (0, 1) \theta_E$. Ve výrazu (3.28) ještě označíme

$$A \equiv \frac{1}{\gamma_W(1 - W_z)^2}, \quad (4.1)$$

$$B(\theta) \equiv \frac{4GM\gamma_V}{c^2 D_L \theta^2}. \quad (4.2)$$

Jako první vezmeme $\mathbf{V} = (2, 6, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (7, 3, -6) \cdot 10^{-4} c$, což odpovídá „obecné“ vzájemné orientaci rychlostí \mathbf{V} a \mathbf{W} . V druhém sloupci Tabulky 1 jsou příslušné číselné hodnoty. Úhlový Einsteinův poloměr má velikost řádově desetiny úhlové milivteřiny, což je dáno především volbou hmotnosti M čočky, vzdáleností D_L, D_S a v menší míře také rychlostí \mathbf{V} čočky, viz vztah (3.6). Podle průmětů θ_1 a θ_2 na směr $\boldsymbol{\beta}$ je jasné, že první obraz je úhlově vzdálenější od čočky, vně Einsteinova kruhu (kruhu o poloměru θ_E opsaného kolem čočky na nebeské sféře), druhý je bližší, uvnitř Einsteinova kruhu. Přicházejí na řadu jednotlivé členy ve vyjádření (3.28), kde jsme provedli roznásobení obou závorek, takže součet členů dává celkový efekt. První člen $A(1 - W_z)$ je nejdůležitější a je společný pro oba obrazy. Hodnota menší než jedna je způsobena vzdalujícím se zdrojem. „Směrový člen“ $-A\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp$,

Veličina	„Obecný“ případ	Případ $\mathbf{W} \perp \boldsymbol{\beta}$	Případ $\mathbf{W}_\perp = \mathbf{V}_\perp$
\mathbf{V}	$(2,0; 6,0; -5,0) \cdot 10^{-4}$	$(2,0; 6,0; -5,0) \cdot 10^{-4}$	$(7,0; 3,0; -5,0) \cdot 10^{-4}$
\mathbf{W}	$(7,0; 3,0; -6,0) \cdot 10^{-4}$	$(7,0; 0,0; -6,0) \cdot 10^{-4}$	$(7,0; 3,0; -6,0) \cdot 10^{-4}$
$\boldsymbol{\beta}$	$(0,0; 1,0) \theta_E$	$(0,0; 1,0) \theta_E$	$(0,0; 1,0) \theta_E$
θ_E	$0,1372727'' \cdot 10^{-3}$	$0,1372727'' \cdot 10^{-3}$	$0,1372727'' \cdot 10^{-3}$
$\boldsymbol{\theta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} / \beta$	$1,618034 \theta_E$	$1,618034 \theta_E$	$1,618034 \theta_E$
$\boldsymbol{\theta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} / \beta$	$-0,618034 \theta_E$	$-0,618034 \theta_E$	$-0,618034 \theta_E$
$A(1 - W_z)$	$0,999399890065850$	$0,999399935038886$	$0,999399890065850$
$-A \boldsymbol{\theta}_1 \cdot \mathbf{W}_\perp$	$-1,0592 \cdot 10^{-12}$	0	$-1,0592 \cdot 10^{-12}$
$AB(\theta_1)(1 - V_z) \boldsymbol{\theta}_1 \cdot \mathbf{W}_\perp$	$2,0230 \cdot 10^{-12}$	0	$2,0230 \cdot 10^{-12}$
$-AB(\theta_1)(1 - W_z) \boldsymbol{\theta}_1 \cdot \mathbf{V}_\perp$	$-4,0463 \cdot 10^{-12}$	$-4,0463 \cdot 10^{-12}$	$-2,0232 \cdot 10^{-12}$
ω'_1 / ω^*	$0,999399890062767$	$0,999399935034840$	$0,999399890064791$
$I'_{\omega,1} / I_\omega^*$	$0,998200750367994$	$0,998200885122337$	$0,998200750374056$
$-A \boldsymbol{\theta}_2 \cdot \mathbf{W}_\perp$	$4,0459 \cdot 10^{-13}$	0	$4,0459 \cdot 10^{-13}$
$AB(\theta_2)(1 - V_z) \boldsymbol{\theta}_2 \cdot \mathbf{W}_\perp$	$-5,2962 \cdot 10^{-12}$	0	$-5,2962 \cdot 10^{-12}$
$-AB(\theta_2)(1 - W_z) \boldsymbol{\theta}_2 \cdot \mathbf{V}_\perp$	$1,0593 \cdot 10^{-11}$	$1,0593 \cdot 10^{-11}$	$5,2967 \cdot 10^{-12}$
ω'_2 / ω^*	$0,999399890071552$	$0,999399935049480$	$0,999399890066255$
$I'_{\omega,2} / I_\omega^*$	$0,998200750394315$	$0,998200885166204$	$0,998200750378445$
$(\omega'_2 - \omega'_1) / \omega^*$	$8,7844 \cdot 10^{-12}$	$1,4640 \cdot 10^{-11}$	$1,4646 \cdot 10^{-12}$
$(I'_{\omega,2} - I'_{\omega,1}) / I_\omega^*$	$2,6322 \cdot 10^{-11}$	$4,3866 \cdot 10^{-11}$	$4,3886 \cdot 10^{-12}$

Tab. 1: Frekvenční posuvy a poměry specifických intenzit obou obrazů při různé volbě rychlostí \mathbf{V} , \mathbf{W}

odpovídající příčnému Dopplerovu jevu, je v absolutní hodnotě větší u prvního obrazu než u druhého, neboť $\theta_1 > \theta_2$. Následující dva „gravitační členy“ jsou naopak v absolutní hodnotě menší u prvního obrazu než u druhého, neboť závisí na θ^{-1} a $\theta_1 > \theta_2$. Dále jsou vypočteny frekvenční poměry a poměry intenzit a nakonec jejich rozdíly mezi oběma obrazy. U druhého obrazu, jenž je blíže čočce, je v tomto případě frekvenční posuv i poměr intenzit výraznější.

Můžeme se také podívat přímo do výstupu programu `pomer.exe`:

```
M = 1.00 M_Slu
DL = 8.00 kpc
DS = 10.00 kpc
V = [ 0.0002000,  0.0006000, -0.0005000] c
W = [ 0.0007000,  0.0003000, -0.0006000] c
beta = [ 0.0000,  1.0000] thetaE
```

Uhlovy Einsteinuv polomer:

```
1.3727270773e-001 muarcsec = 2.1847629986e-009 rad
```

Uhlove polohy obrazu (v jednotkách thetaE):

```
theta1 = [ 0.0000000000e+000,  1.6180339887e+000]
theta2 = [ 0.0000000000e+000, -6.1803398875e-001]
```

Prumety uhlu theta1, theta2 do smeru vektoru beta v jednotkách thetaE:

```
1.6180339887e+000
-6.1803398875e-001
```

Porovnani clenu ve frekvencnim pomeru prvnio obrazu:

```
0.999399890065850
-1.05923e-012
2.02296e-012
-4.04632e-012
```

Porovnani clenu ve frekvencnim pomeru druheho obrazu:

```
0.999399890065850
4.04591e-013
-5.29617e-012
1.05934e-011
```

Pomer omega' / omega* pro oba obrazy:

```
0.999399890062767
0.999399890071552
```

Pomer omega' / omega* pro oba obrazy pocitany primo:

```
0.999399890062768
0.999399890071552
```

Pomer omega' / omega* pro oba obrazy "presne":

```
0.999399890062768
0.999399890071552
```

Rozdíl frekvenčního poměru druhého a prvního obrazu:

8.784e-012

Relativní poměr ($\omega' - \omega^*$) / ω^* pro oba obrazy:

-6.001099372326e-004

-6.001099284482e-004

Poměr $I'\omega / I\omega$ pro oba obrazy:

0.998200750367994

0.998200750394315

Relativní poměr ($I'\omega - I\omega$) / $I\omega$ pro oba obrazy:

-1.799249632006e-003

-1.799249605685e-003

Hodnoty frekvenčního poměru jsou zde pro kontrolu vypočítány více způsoby: pomocí výsledného vztahu (3.28), „pocitany primo“ znamená číselný výpočet \mathbf{U} , \mathbf{n}_s a dosazení do (3.16), „presne“ je bez aproximací v (3.22). Chyba frekvenčního posuvu je tedy na posledním vypsaném desetinném místě, poměr intenzit má asi trojnásobnou chybu.

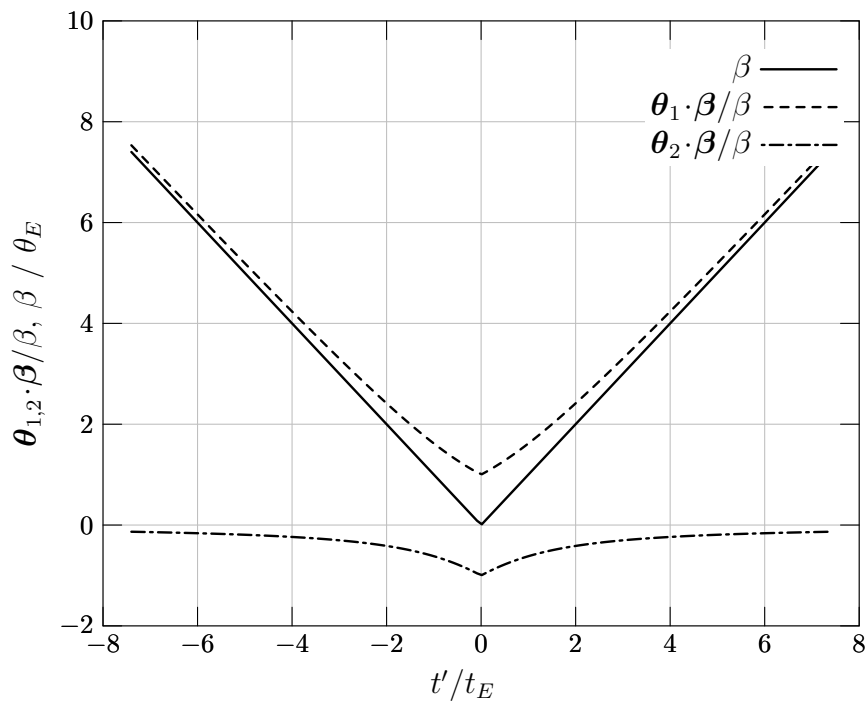
Nyní položíme $\mathbf{W} = (7, 0, -6) \cdot 10^{-4} c$ a rychlost \mathbf{V} necháme stejnou: $\mathbf{V} = (2, 6, -5) \cdot 10^{-4} c$. Tedy průmět \mathbf{W}_\perp je kolmý na β , a tedy i na $\theta_{1,2}$. Jak se můžeme přesvědčit ve třetím sloupci tabulky 1, díky volbě \mathbf{W} jsou dva členy u každého z obrazů nulové. Frekvenční posuvy jsou zhruba o 10^{-7} větší než předcházející situaci, neboť γ_W je nyní menší a koeficient A je větší. Rozdíl frekvenčních posuvů mezi obrazy je v tomto případě jen o málo větší než při první volbě \mathbf{W} , přibližně 10^{-11} . Pokud bychom volili \mathbf{V}_\perp kolmé na β , tak by naopak vymizel poslední člen u obou obrazů.

Další možná volba je $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{W}_\perp$, číselně $\mathbf{V} = (7, 3, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (7, 3, -6) \cdot 10^{-4} c$, viz čtvrtý sloupec tabulky 1. Gravitační členy mají navzájem opačná znaménka a jejich společný příspěvek ke frekvenčnímu posuvu je v námi dosažené přesnosti zanedbatelný. Pokud bychom zvolili $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, tak by se gravitační členy ve vztahu (3.28) odečetly úplně, tj. gravitační příspěvek k frekvenčnímu posuvu by byl v rámci aproximací použitých při odvozování tohoto vztahu nulový.

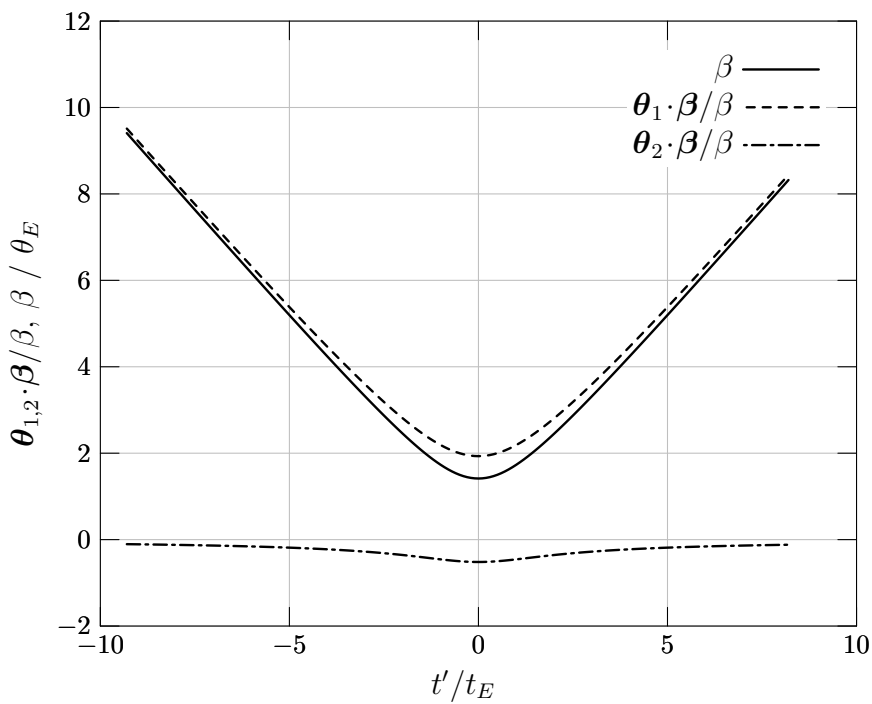
4.2 Časový vývoj frekvenčního poměru

K provedení výpočtu časové závislosti frekvenčního poměru obou obrazů stačí rozšířit výše používaný statický program `pomer.c`. Vyjdeme z počáteční polohy zdroje β a s konstantním časovým krokem Δt počítáme pohyb zdroje i čočky po nebeské sféře. Pohyb v radiálním směru zanedbáváme, na uvažovaných časových škálách (maximálně roky) je vzhledem k velikosti vzdáleností D_L a D_S nepodstatný. Okamžitá úhlová vzdálenost zdroje od čočky je rovna aktuální hodnotě β . Výpočet poměru frekvencí a intenzit je již stejný jako ve statickém případě. Zdrojový kód programu je v souboru `vyvoj.c`.

Nejprve se podívejme, jak se s časem mění polohy obrazů. Jistou informaci máme již z grafu na Obr. 1. Časový vývoj poloh obou obrazů a zdroje je na Obr. 1 a 2. Rych-



Obr. 1: Hodnoty průmětů θ_1 , θ_2 do směru β a velikost β v závislosti na čase v případě, kdy zdroj mívá čočku v zanedbatelně malé úhlové vzdálenosti.



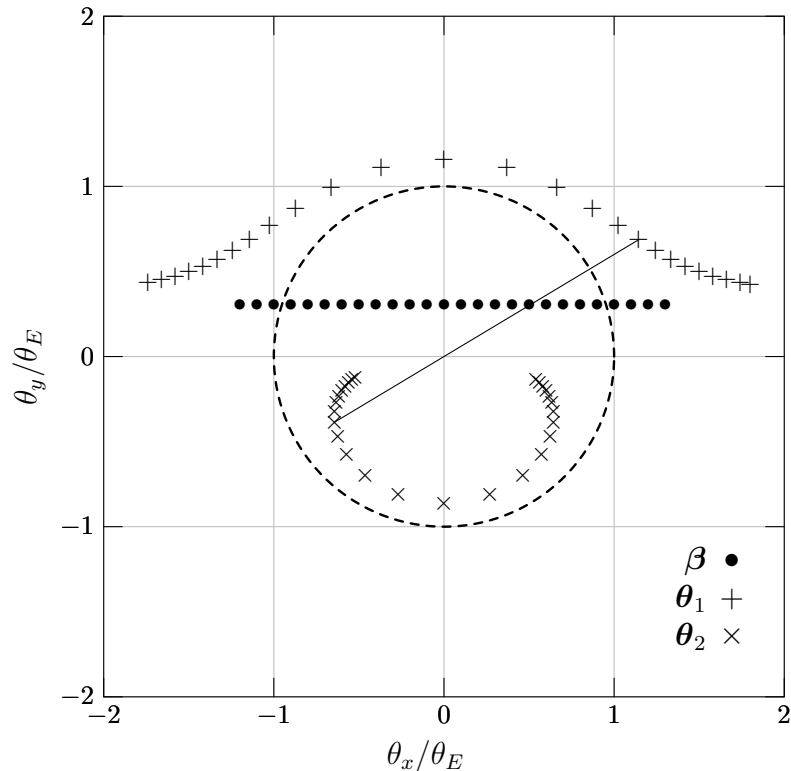
Obr. 2: Hodnoty průmětů θ_1 , θ_2 do směru β a velikost β v závislosti na čase v případě, kdy zdroj mívá čočku ve vzdálenosti přibližně $1,4\theta_E$.

losti jsou voleny v obou případech $\mathbf{V} = (3, 3, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = -(5, 5, 7) \cdot 10^{-4} c$ s ohledem na to, aby se zdroj mohl „potkat“ s čočkou, tzn. aby v určitém okamžiku bylo $\beta = \mathbf{0}$ (samozřejmě s přesností použité aritmetiky). Čas měříme v jednotkách Einsteinova času, tj. času, za který se úhlová vzdálenost zdroje od čočky změní právě o úhlový Einsteinův poloměr θ_E , přičemž v místě nejmenšího β pokládáme $t' = 0$ (to nijak nesouvisí s časem $t' = 0$, kdy v našem analytickém výpočtu docházelo k ohybu fotonu). Na Obr. 1 je počáteční hodnota $\beta_0 = (6, 6) \theta_E$. V čase $t' = 0$ nastává $\beta = 0$ a polohy obrazů jsou $\pm\theta_E$. Po dostatečně dlouhé době t' jeden obraz prakticky splývá se zdrojem a druhý s čočkou. Obr. 2 se liší volbou počátečního $\beta_0 = (6, 8) \theta_E$, což znamená, že zdroj míjí čočku v úhlové vzdálenosti přibližně $1,4\theta_E$. Asymptotika zůstává stejná jako na obr. 1.

Můžeme též znázornit polohy zdroje a obrazů na nebeské sféře v závislosti na čase (parametricky), viz. obr. 3. Volili jsme pro jednoduchost $\beta_0 = (-1, 2, 0, 3) \theta_E$, $\mathbf{V} = (-3, 0, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (5, 0, -7) \cdot 10^{-4} c$. Příslušející si polohy zdroje a obrazů vždy leží na přímce procházející počátkem.

Nyní se zaměříme na časový vývoj členů ve vztahu (3.28) a celkového frekvenčního posuvu. Rozlišíme dva případy: obecný, kdy zdroj míjí čočku ve vzdálenosti řádově θ_E , a speciální, kdy během časového vývoje nastane $\beta \approx 0$.

Pro demonstraci obecného případu zvolíme $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$, počáteční hodnotu $\beta_0 = (7, 1) \theta_E$, krok $0,1 t_E$ a délku výpočtu



Obr. 3: Úhlové souřadnice zdroje a obrazů v závislosti na čase. Čárkovaně je nakreslen Einsteinův kruh – kruh o poloměru θ_E . Čára spojuje vybranou polohu zdroje a k ní odpovídající obrazy. Čočka je v bodě $(0, 0)$.

$14 t_E$. Hlavní příspěvek k frekvenčnímu posuvu dává konstantní člen

$$A(1 - W_z) \doteq 0,9993999300418824. \quad (4.3)$$

Velikosti ostatních příspěvků k frekvenčnímu posuvu v závislosti na čase pro první obraz (bližší ke zdroji) je na obr. 4. Vidíme, že „směrový člen“ $-A\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp$ se chová asymptoticky lineárně, což je v souladu s chováním $\boldsymbol{\theta}_1 \simeq \boldsymbol{\beta}$ pro dost velké β , impaktní parametr se totiž stává zanedbatelný, směr vektoru $\boldsymbol{\beta}$ se už prakticky nemění a jeho velikost β se mění lineárně s časem.

Uvedená asymptotika má však omezenou platnost, protože striktně vzato při $\beta \rightarrow \infty$ roste θ_1 nade všechny meze a vztah (3.28) přestává platit vzhledem k použitým aproximacím. Navíc $\theta_2 \rightarrow 0$, a tedy gravitační příspěvky úměrné θ^{-1} divergují.

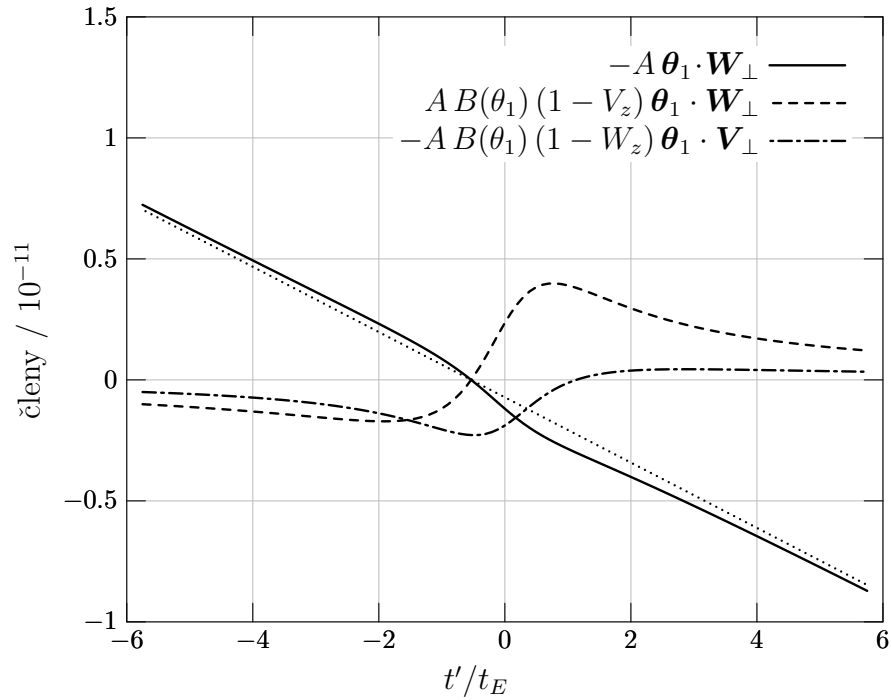
Uvažovaný člen $-A\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp$ má nulovou hodnou v čase přibližně $-0,5 t_E$, tedy předtím, než dojde k maximálnímu přiblížení. To je způsobeno volbou směru \mathbf{W}_\perp , v inkriminovaném čase je \mathbf{W}_\perp kolmé na $\boldsymbol{\beta}$, tedy i na $\boldsymbol{\theta}_1$, což implikuje $\mathbf{W}_\perp \cdot \boldsymbol{\theta}_1 = 0$. Ze stejného důvodu je v tomto čase nulový i člen $AB(\theta_1)(1 - V_z)\boldsymbol{\theta}_1 \cdot \mathbf{W}_\perp$, druhý gravitační člen se nuluje přibližně v čase $1 t_E$ díky volbě směru \mathbf{V}_\perp . (Pokud bychom vhodně zvolili \mathbf{W}_\perp rovnoběžné s \mathbf{V}_\perp tak by se směrový člen i oba gravitační členy nulovaly ve stejném čase $t' = 0$.) Oba gravitační členy se blíží k nule pro dost velké β , resp. dost velký čas $|t'|$, což můžeme vysvětlit chováním $\boldsymbol{\theta}_1 \simeq \boldsymbol{\beta}$, viz (3.9).

Časový vývoj příspěvků k frekvenčnímu posuvu druhého obrazu je na obr. 5. Vzhledem k tomu, že velikost θ_2 je pouze asi 0,1 až 0,2 θ_E , je směrový člen druhého obrazu řádově menší než oba gravitační členy. Gravitační členy se nulují ve stejných časech jako ty u prvního obrazu a vykazují lineární asymptotické chování. To není překvapením, neboť jsou oba úměrné θ_2^{-1} a platí (3.10).

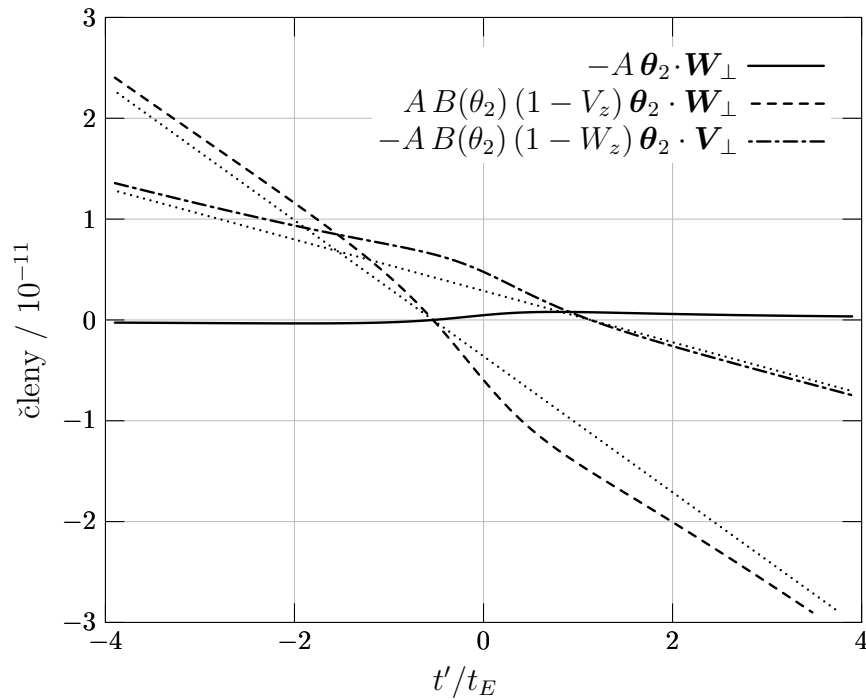
Odchyly frekvenčního posuvu od konstanty (4.3) pro oba obrazy jsou na obr. 6. Jde v podstatě jen o součet směrového členu a obou gravitačních členů. Vidíme, že u druhého obrazu jsou změny frekvenčního posuvu výraznější než u prvního. Příspěvek od gravitačních členů u druhého obrazu při rostoucím β je zde tedy výraznější než příspěvek směrového členu u prvního obrazu. Dále je jasné, že vzájemné rozdíly frekvenčního posuvu mezi obrazy se zvýrazňují při rostoucím $|t'|$ resp. β . Připomeňme ještě, že naznačená asymptotika neznamená divergenci frekvenčního posuvu, neboť naše vztahy přestávají při příliš velkém β platit z výše uvedených důvodů. Náš vztah (3.28) je spolehlivý zhruba do β v řádu desítek či stovek Einsteinových poloměrů.

Pro změny specifických intenzit platí analogické závěry, viz obr. 7. Vzhledem ke vztahu (3.29) jsou změny specifických intenzit trojnásobné v porovnání se změnami frekvenčních posuvů (konstantní člen $[A(1 - W_z)]^3 = \gamma_W^{-3}(1 - W_z)^{-3}$ jsme odečetli).

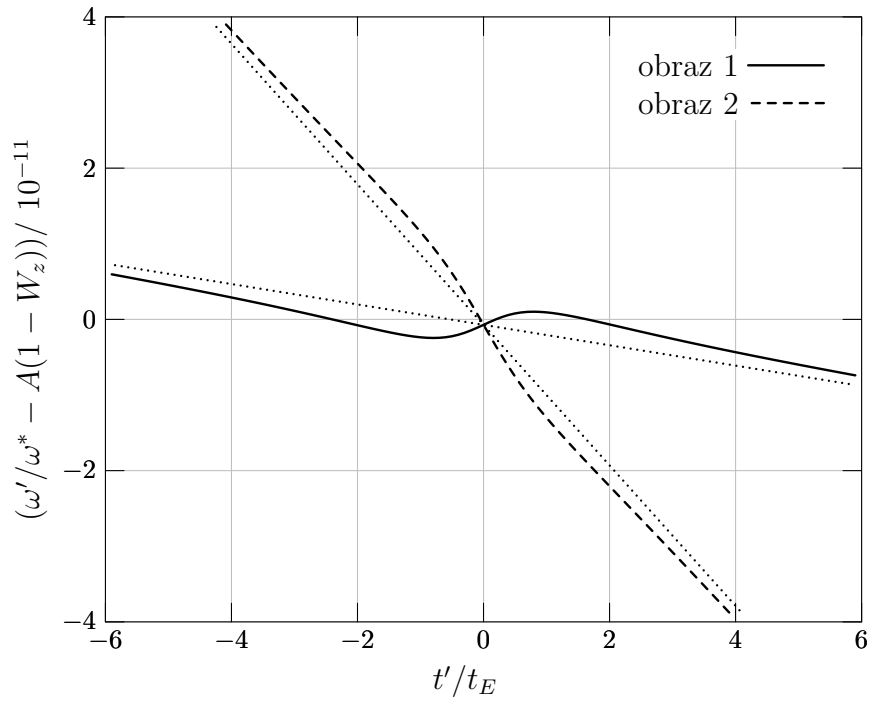
Nyní přichází na řadu jiná, speciálnější konfigurace. Změníme pouze $\beta_0 = (7, 2) \theta_E$ a rychlosti necháme stejné: $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$. Směr β_0 je volen antiparalelní k úhlové rychlosti $\mathbf{W}_\perp/D_S - \mathbf{V}_\perp/D_L$ vzájemného pohybu zdroje a čočky po nebeské sféře vůči pozorovateli. To znamená, že v čase $t' = 0$ nastává $\beta \approx 0$, vzhledem ke konečné přesnosti výpočtu nikdy nenastane $\beta = 0$ – v tom případě by vznikl Einsteinův kruh. Na obr. 8 jsou opět příspěvky k frekvenčnímu posuvu. Křivky zde očividně mají skoky, na rozdíl od těch na obr. 4. Vysvětlení je prosté. Těsně před „setkáním“ a těsně po něm jsou směry $\boldsymbol{\beta}$ navzájem opačné, při $\beta \rightarrow 0$ platí $\boldsymbol{\theta}_1 \rightarrow +\theta_E \boldsymbol{\beta}/\beta$ a $\boldsymbol{\theta}_2 \rightarrow -\theta_E \boldsymbol{\beta}/\beta$. Obrazy si tedy po „setkání“



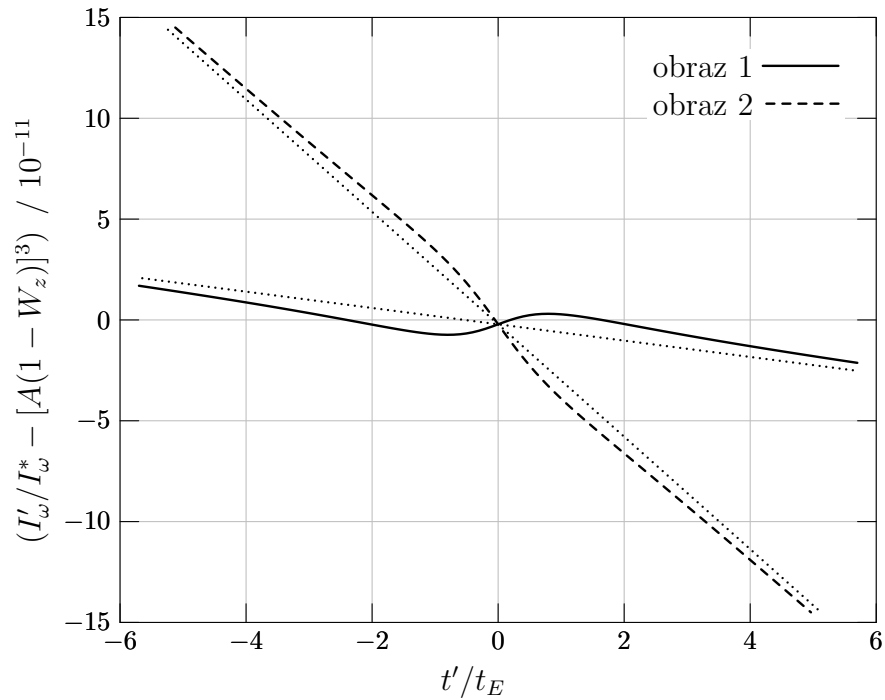
Obr. 4: Hodnoty členů ze vztahu (3.28) pro první obraz v závislosti na čase při volbě $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$, $\beta_0 = (7, 1) \theta_E$. Tečkovaně je nakresleno asymptotické chování členu $-A \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_{\perp}$ pro velké β .



Obr. 5: Hodnoty členů ze vztahu (3.28) pro druhý obraz v závislosti na čase při volbě $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$, $\beta_0 = (7, 1) \theta_E$. Tečkovaně je nakresleno asymptotické chování gravitačních členů pro velké β .



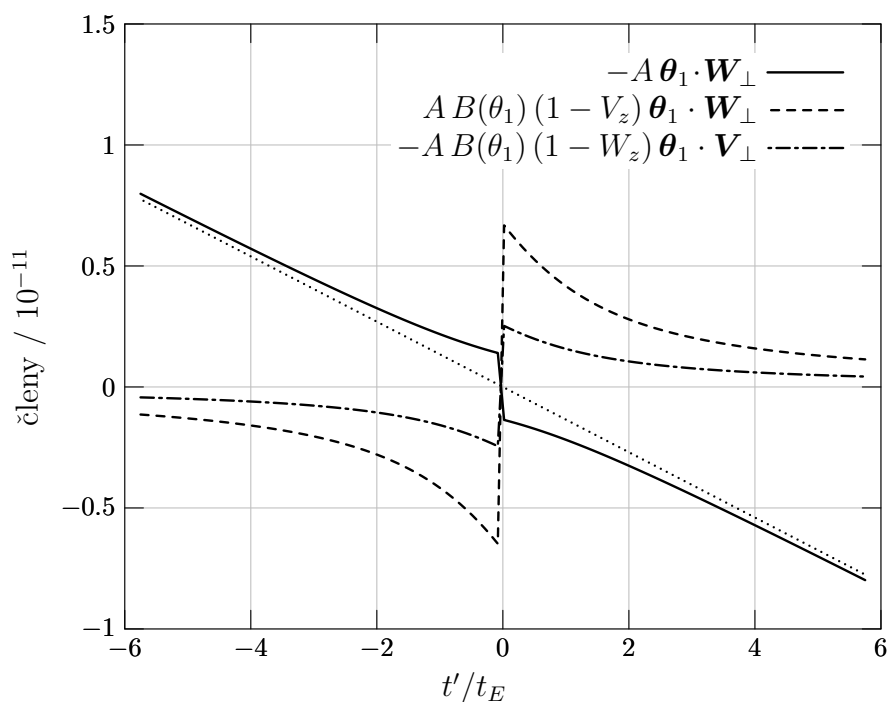
Obr. 6: Změny frekvenčních posuvů obou obrazů v závislosti na čase při volbě $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$, $\beta_0 = (7, 1) \theta_E$. Tečkovaně je nakresleno asymptotické chování pro velké β .



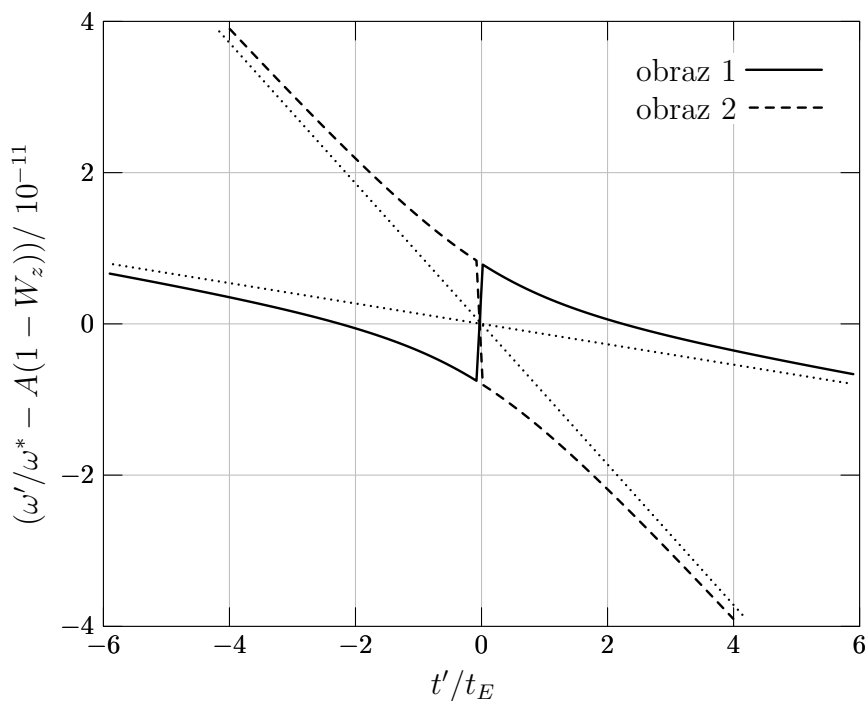
Obr. 7: Změny poměrů intenzit obou obrazů v závislosti na čase při volbě $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$, $\beta_0 = (7, 1) \theta_E$. Tečkovaně je nakresleno asymptotické chování pro velké β .

zdroje a čočky „vymění strany“: první obraz je opět blíže zdroji a druhý obraz je zase blíže k čočce. Kromě těchto skoků jsou ale průběhy jednotlivých členů podobné jako na obr. 4 a nebudeme je dále popisovat.

Změny frekvenčních posuvů v tomto případě jsou na obr. 9. Opět si všímáme skoků v čase $t' = 0$. Asymptotika je však prakticky stejná jako na obr. 6.



Obr. 8: Hodnoty členů ze vztahu (3.28) pro první obraz v závislosti na čase při volbě $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$, $\beta_0 = (7, 2) \theta_E$. Tečkovaně je nakresleno asymptotické chování členu $-A \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W}_\perp$ pro velké β .



Obr. 9: Změny frekvenčních posuvů obou obrazů v závislosti na čase při volbě $\mathbf{V} = (3, -2, -5) \cdot 10^{-4} c$, $\mathbf{W} = (-5, -5, -6) \cdot 10^{-4} c$, $\beta_0 = (7, 2) \theta_E$. Tečkovaně je nakresleno asymptotické chování pro velké β .

Diskuse

V naší práci předpokládáme jen jednoduchou čočku – jedinou hvězdu, přitom nezanebatelná část hvězd jsou vícenásobné hvězdné soustavy. Mohlo by tedy mít význam prozkoumat speciálně relativistické spektrální efekty u hvězd s více složkami.

Podle vztahu (3.28) by se mohlo zdát, že frekvenční posuv u druhého obrazu (bližšího čočce) může při rostoucím β divergovat vlivem rostoucích gravitačních členů. Vztah (3.17) by pak implikoval vysoký poměr naměřené a vyzářené specifické intenzity, a to paradoxně pro zdroj hodně úhlově vzdálený od čočky. To je samozřejmě nesmysl. Vztah (3.28) byl získán s použitím rozvoje do prvního řádu v gravitačních členech, pro zachování platnosti tohoto vztahu musí gravitační členy zůstat dostatečně malé. Pokud by čočkou byla degenerovaná hvězda nebo černá díra, bylo by v tomto režimu třeba integrovat dráhy fotonu v režimu silného pole obecné teorie relativity. Pro nedegenerovanou hvězdu bude obraz při dostatečném přiblížení k nule čočkou zakryt. V každém případě se však z hlediska pozorovatele v této limitě obraz natolik zmenšuje, že navzdory potenciálnímu růstu specifické intenzity jeho celkový světelný tok klesá rapidně k nule. Jeho posunuté spektrum tak bude potlačeno vůči spektru prvního obrazu.

Vztah pro frekvenční posuv jsme se pokusili porovnat se vztahem (167) v článku [4], str. 22. Rozvojem našeho výrazu v rychlostech jsme získali vyjádření

$$\frac{\delta\omega'}{\omega^*} = \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{W} \left[1 + \mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{W} + (\mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{W})^2 - \frac{W^2}{2} \right] - \frac{W^2}{2} + \frac{4GM\gamma_V}{c^2 D_L \theta} \frac{(1 - V_z) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{W} - (1 - W_z) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{V}}{\theta(1 - W_z)}, \quad (5.1)$$

kde $\delta\omega = \omega' - \omega^*$. Tento vztah částečně připomíná citovaný vztah (168), který je však v jiných proměnných a ve snaze tyto vztahy ztotožnit jsme nebyli úspěšní, ačkoli citovaný vztah by měl být zobecněním našeho výrazu. Při porovnávání numerických výsledků získaných z citovaného vztahu (168) či přesnějšího rozvoje vztahu (167) z téhož článku jsme zjistili rozdíly v řádu 10^{-11} . Příčinu vidíme v tom, že jsme patrně neprovedli korektní přechod od našich proměnných k proměnným užívaným v článku [4].

Z tabulky 1 i grafů na obr. 4, 5 a 8 je vidět, že časově závislé příspěvky k frekvenčnímu posuvu činí velmi zhruba 10^{-11} (asymptotika je omezená platností vztahu (3.28), nelze tedy brát příliš velké $|t'|$), což je samozřejmě ovlivněno námi zvolenými parametry. Neočekáváme však, že při jiné nepříliš odlišné volbě parametrů bychom

dostali diametrálně odlišné výsledky. Rozdíly frekvenčních posuvů činí také zhruba 10^{-11} (opět s omezeným časovým vývojem). Podle našich výsledků tedy můžeme říci, že i při fantastické přesnosti dnešních měření je měření časových změn frekvence způsobených gravitační mikročočkou v naší Galaxii či rozdílů frekvencí mezi obrazy téhož zdroje velmi komplikovaným problémem.

Oprostíme-li se však od hodnot parametru typických pro běžné galaktické mikročočky, lze z odvozených vztahů vidět, že efekty mohou být nezanedbatelné pro dostatečně vysoké relativistické rychlosti a pro paprsky procházející blíže k horizontu. V tomto případě již pro exaktní výsledky nestačí použít post-newtonovskou aproximaci a je třeba přejít k plně obecně relativistickým výpočtům.

Závěr

V naší práci jsme studovali vliv rychlostí čočky a zdroje na frekvenční posuv a poměr specifických intenzit v průběhu gravitačního mikročočkování.

Převzali jsme rychlostně závislou čočkovou rovnici a vyhodnotili závislost poloh obrazů θ na poloze zdroje β . S použitím STR jsme odvodili pro zcela libovolné rychlosti výraz udávající poměr naměřené a vyzářené frekvence a výraz popisující poměr naměřené a vyzářené specifické intenzity. Tyto výrazy obsahují θ , obrazy tedy mají obecně odlišné frekvenční posuvy a intenzity.

Dále jsme provedli numerické vyhodnocení těchto vztahů – při několika pevných konfiguracích i při časovém vývoji. Zjistili jsme, že časové změny frekvenčního posuvu jsou pro typické galaktické mikročočky velmi zhruba v řádu 10^{-11} , jejich naměření by tedy bylo velmi obtížné. Odvozené vztahy však naznačují, že efekt může být dostatečně silný pro paprsky procházející dostatečně blízko čočkující neutronové hvězdy nebo černé díry.

Literatura

- [1] Paczyński, B. (1996): *Gravitational Microlensing in the Local Group*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 34, 419.
- [2] Sutherland, W. (1999): *Gravitational microlensing – A report on the MACHO project*, Reviews of Modern Physics, 71, 421.
- [3] Heyrovský, D. (2005): *Velocity Effects on the Deflection of Light by Gravitational Microlenses*, The Astrophysical Journal, 624, 28.
- [4] Kopeikin, S. M.; Schäfer, G. (1999): *Lorentz covariant theory of light propagation in gravitational fields of arbitrary-moving bodies*, Physical Review D, 60, 124002.
- [5] Horský, J.; Novotný, J.; Štefaník, M. (2002): *Mechanika ve fyzice*, ACADEMIA, Praha.
- [6] Dvořák, L. (1984): *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha.
- [7] Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. (1973): *Gravitation*, Freeman, San Francisco.