MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vendula Píšová

Matice s prvky −1, 1, 0

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: MMUD

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Ráda bych poděkovala Martině Škorpilové za její nevyčerpatelnou ochotu, laskavost a trpělivost. Bez jejích cenných rad by tato práce vznikala jen stěží.

Název práce: Matice s prvky -1, 1, 0

Autor: Vendula Píšová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V této práci postupně představujeme vybrané typy matic, jejichž prvky jsou pouze čísla -1, 1, 0. Text, který je kombinací známých výsledků z různých oblastí matematiky, je obohacen řadou vysvětlujících komentářů a konkrétních příkladů. Díky tomu může čtenář snáze pochopit teorii a nahlédnout do netriviálních aplikací. Krok za krokem se seznámíme s maticemi sousednosti a pokrýváním úplných grafů úplnými bipartitními grafy. Představíme si rovněž Hadamardovy matice a ukážeme si, pro které řády je lze zkonstruovat. Incidenční matice systémů podmnožin nám pomohou vyřešit kombinatorický problém radních města Lišákova. Nakonec pomocí incidenčních matic grafů dokážeme Cayleyho formuli o počtu koster úplného grafu.

Klíčová slova: matice, matice sousednosti, Hadamardova matice, matice incidence

Title: Matrices with Entries -1, 1, 0

Author: Vendula Píšová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: In this thesis we introduce selected classes of matrices, whose entries are only numbers -1, 1, 0. We combine existing results from various fields of Mathematics and enrich them with specific examples and explanations, with the aim of making the understanding of the text easier. Thanks to that, the reader can comprehend the theory and look under the hood of non-trivial applications. We will start with introducing adjacency matrices and covering of complete graphs with complete bipartite graphs. Then we follow with Hadamard matrices and will show the conditions for their constructions. Incidence matrices of the set systems will help us solve the combinatorial problem of the Odd-town clubs. Finally, we will prove the Cayley formula about the spanning trees of the complete graph, using incidence matrices.

Keywords: matrix, adjacency matrix, Hadamard matrix, incidence matrix

Obsah

Úvod

S maticemi se zpravidla blíže seznamujeme v základním kurzu lineární algebry. Dozvídáme se, jak s jejich pomocí popisovat homomorfismy vektorových prostorů, řešit soustavy lineárních rovnic či jak vypočítat jejich charakteristické polynomy a vlastní čísla. Význam matice jako nedocenitelného nástroje pro popis a řešení matematických problémů však samotnou lineární algebru dalece přesahuje.

V této práci se budeme věnovat vybraným maticím, jejichž prvky jsou pouze čísla -1, 1 nebo 0. Na příkladu těchto matic si ukážeme, jak lze využít prostředky lineární algebry k dokazování poznatků z oboru geometrie, kombinatoriky či teorie grafů. Naším cílem je nabídnout čtenáři ucelený, srozumitelný a názorný výklad protkaný mnohými obrázky a příklady, díky kterým se čtenář snadno sblíží s každou z předložených matic.

V první kapitole si připomeneme některé základní pojmy lineární algebry a teorie grafů. Uvedeme také několik důležitých poznatků a dokážeme některá základní tvrzení.

Ve druhé kapitole si představíme matice sousednosti a jejich využití při jednoznačné reprezentaci grafů. Ukážeme si, jak vypadají matice sousednosti speciálních typů grafů. Nakonec se podíváme na problém pokrývání úplných grafů úplnými bipartitními grafy.

Třetí kapitola nás zavede do světa Hadamardových matic. Zkusíme si zkonstruovat jejich speciální typ – Sylvesterovy–Hadamardovy matice – a prozkoumáme jejich neobyčejné vlastnosti. Závěrem si představíme Hadamardovu domněnku, jeden z doposud stále otevřených problémů matematiky.

Čtvrtá kapitola nás přenese do města Lišákova, kde pomůžeme vyřešit jeden kombinatorický problém místních radních. Užitečným nástrojem se nám ukážou být incidenční matice systému podmnožin, které si následně představíme také na příkladu konečných projektivních rovin.

V poslední, páté kapitole zavedeme incidenční matice orientovaných i neorientovaných grafů. Ukážeme si souvislost incidenční matice s Laplaceovou maticí. To vše nakonec využijeme k určování počtu koster (nejen) úplných grafů.

Věříme, že si text najde své čtenáře mezi širší matematickou komunitou, vysokoškolskými studenty přírodovědecky či technicky zaměřených oborů a budoucími i stávajícími učiteli matematiky.

1. Základní poznatky

Úvodní kapitolu využijeme pro přehledné zavedení základních definic a pojmů. Napříč učebnicemi se definice mírně liší, proto se snažíme přesně vymezit význam dále používaných pojmů, abychom zamezili případnému zmatení. Zároveň chceme čtenáři poskytnout ucelenou pomůcku a minimalizovat nutnost listovat v jiné literatuře.

1.1 Lineární algebra

V této sekci připomeneme některé základní pojmy a poznatky z lineární algebry. Vzhledem k tomu, že není možné zde uvádět a dokazovat všechny vlastnosti dále využívaných pojmů, omezíme se především na ucelený a jednotící přehled jejich definic a čtenáře případně odkazujeme na učebnici J. Bečváře [1], ze které v následujícím textu vycházíme[1].

Definice 1 (Matice). *Nechť X je neprázdná množina a m, n přirozená čísla. Maticí A typu $n \times m$ nad množinou X nazýváme schéma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in X$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a každé $j = 1, \dots, m$.

Matici A budeme značit též symbolem (a_{ij}) nebo také, pokud bude nutné znát typ matice, $(a_{ij})_{n\times m}$ či $A_{n\times m}$. Je-li $m \neq n$, pak hovoříme o obdélníkové matici typu $n \times m$. Je-li naopak $m = n$, pak hovoříme o čtvercové matici řádu n. Dále říkáme, že prvek a_{ij} stojí v matici na pozici ij.

Definice 2 (Těleso). *Množinu T se dvěma binárními operacemi „$+$“ a „$\cdot$“ nazýváme tělesem, jestliže má alespoň dva prvky a platí následující axiomy:*

(i) $\forall a, b, c \in T \quad (a + b) + c = a + (b + c)\,,$

(ii) $\forall a, b \in T \quad a + b = b + a\,,$

(iii) $\exists 0 \in T \quad \forall a \in T \quad a + 0 = a\,,$

(iv) $\forall a \in T \quad \exists - a \in T \quad a + (-a) = 0\,,$

(v) $\forall a, b, c \in T \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,,$

(vi) $\exists 1 \in T \quad \forall a \in T \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a\,,$

(vii) $\forall a \in T, a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \in T \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1\,,$

(viii) $\forall a, b, c \in T \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,,$

[1] Zájemcům o cizojazyčnou literaturu doporučujeme monografii R. A. Horna a Ch. R. Johnsona [6].

(ix) $\forall a, b, c \in T \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,.$

Jestliže je navíc splněn axiom

(x) $\forall a, b \in T \quad a \cdot b = b \cdot a\,,$

potom nazýváme množinu T komutativním tělesem nebo polem.

Symbolem $\mathbb{Z}_2$ budeme značit dvouprvkové pole obsahující pouze prvky 0 a 1. Tyto prvky jsou svázány binárními operacemi „+“ a „·“ následujícím způsobem:

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|cc|} \hline \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\,.$$

Definice 3 (Okruh). *Množinu R se dvěma binárními operacemi „+“ a „·“ nazýváme okruhem, jestliže platí následující axiomy:*

(i) $\forall a, b, c \in R \quad (a + b) + c = a + (b + c)\,,$

(ii) $\forall a, b \in R \quad a + b = b + a\,,$

(iii) $\exists 0 \in R \quad \forall a \in R \quad a + 0 = a\,,$

(iv) $\forall a \in R \quad \exists -a \in R \quad a + (-a) = 0\,,$

(v) $\forall a, b, c \in R \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,,$

(vi) $\forall a, b, c \in R \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,,$

(vii) $\forall a, b, c \in R \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,.$

Jestliže je navíc splněn axiom

(viii) $\forall a, b \in R \quad a \cdot b = b \cdot a\,,$

potom nazýváme množinu R komutativním okruhem. Jestliže je splněn axiom

(ix) $\exists 1 \in R \quad \forall a \in R \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a\,,$

potom nazýváme množinu R okruhem s jednotkovým prvkem. Jsou-li splněny oba axiomy (viii) *a* (ix)*, nazýváme množinu R komutativním okruhem s jednotkovým prvkem.*

Definice 4 (Vektorový prostor). *Nechť T je pole a V množina s binární operací „+“. Nechť je dáno zobrazení kartézského součinu $T \times V$ do množiny V, které dvojici prvků $a \in T$ a $v \in V$ přiřazuje prvek $a \cdot v$ nebo jednodušeji zapsáno av. Nechť dále platí následující axiomy:*

(i) $\forall u, v, w \in V \quad (u + v) + w = u + (v + w)\,,$

(ii) $\forall u, v \in V \quad u + v = v + u\,,$

(iii) $\exists o \in V \quad \forall u \in V \quad u + o = u\,,$

(iv) $\forall u \in V \quad \exists -u \in V \quad u + (-u) = o\,,$

(v) $\forall u, v \in V \quad \forall a \in T \quad a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v\,,$

(vi) $\forall u \in V \quad \forall a, b \in T \quad (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u\,,$

(vii) $\forall u \in V \quad \forall a, b \in T \quad (a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)\,,$

(viii) $\forall u \in V \quad 1 \cdot u = u\,.$

Potom množinu V nazýváme vektorovým prostorem nad polem T. Prvky množiny V nazýváme vektory, prvky pole T skaláry. Vektor označený symbolem o z axiomu (iii) *nazýváme nulovým vektorem prostoru V, vektor označený symbolem $-u$ z axiomu* (iv) *nazýváme opačným vektorem k vektoru u.*

Příkladem vektorového prostoru nad tělesem T je množina T^n všech n-tic prvků tělesa T. Operace sčítání n-tic a násobení n-tice skalárem se přitom provádí po složkách, tj.

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$
$$c(a_1, a_2, ..., a_n) = (ca_1, ca_2, ..., ca_n).$$

Definice 5 (Podprostor). *Nechť V je vektorový prostor nad polem T. Podmnožinu W vektorového prostoru V nad polem T nazveme podprostorem prostoru V, jestliže je W vektorovým prostorem nad polem T vzhledem k týmž operacím „+“ a „·“.*

Definice 6 (Lineární obal). *Nechť V je vektorový prostor nad polem T a M je podmnožina vektorového prostoru V. Průnik všech podprostorů V, které množinu M obsahují, nazýváme lineárním obalem množiny M a značíme symbolem $[M]$. Lineární obal vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorového prostoru V budeme značit symbolem $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.*

Definice 7 (Lineární kombinace). *Nechť V je vektorový prostor nad polem T, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k \in T$. Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

nazýváme lineární kombinací vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ s koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Jestliže $k = 0$, pak hovoříme o prázdné lineární kombinaci, kterou klademe rovnou nulovému vektoru o.

Definice 8 (Množina generátorů). *Nechť V je vektorový prostor nad polem T a M je podmnožina prostoru V. Množinu M nazýváme množinou generátorů prostoru V, jestliže lineárním obalem množiny M je celý vektorový prostor V. Říkáme také, že množina M generuje prostor V.*

Definice 9 (Lineární závislost). *Nechť V je vektorový prostor nad polem T a S je soubor vektorů prostoru V. Soubor S se nazývá lineárně závislý, jestliže některý vektor souboru S je možno vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů tohoto souboru. V opačném případě se soubor S nazývá lineárně nezávislý.*

Definice 10 (Báze). *Nechť V je vektorový prostor nad polem T a B je podmnožina prostoru V. Podmnožinu B nazveme bází vektorového prostoru V, jestliže je lineárně nezávislou množinou generátorů prostoru V.*

Definice 11 (Dimenze vektorového prostoru). *Dimenzí $\dim V$ vektorového prostoru V nazveme mohutnost jeho libovolné báze.*

Definice 12 (Nulová matice). *Matici $O_{n,m} = (o_{kl})_{n\times m}$ nad komutativním okruhem R nazýváme nulovou maticí, jestliže $o_{kl} = 0$ pro všechna $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$. Pokud je nulová matice čtvercová řádu n, značíme ji symbolem O_n.*

Definice 13 (Jednotková matice). *Nechť R je komutativní okruh s jednotkovým prvkem. Čtvercovou matici $I_n = (i_{kl})$ nad okruhem R nazýváme jednotkovou maticí, jestliže*

$$i_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = l, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 14 (Matice samých jedniček). *Nechť R je komutativní okruh s jednotkovým prvkem. Čtvercovou matici $J_n = (j_{kl})$ řádu n nad okruhem R nazýváme maticí samých jedniček, jestliže $j_{kl} = 1$, $\forall k, l = 1, \dots, n$.*

Definice 15 (Hlavní diagonála). *Hlavní diagonálou čtvercové matice A řádu n nazýváme posloupnost prvků $a_{11}, a_{22} \dots, a_{nn}$. O těchto prvcích říkáme, že leží na hlavní diagonále, nebo jen na diagonále matice A.*

Definice 16 (Transponovaná matice). *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $n \times m$. Transponovanou maticí k matici A budeme nazývat matici $A^T = (\overline{a}_{ij})$ typu $m \times n$, pro kterou platí $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, $\forall i = 1, \dots n$, $\forall j = 1, \dots m$.*

Definice 17 (Podmatice). *Matici, která vznikne z matice A vynecháním některých řádků a sloupců, nazýváme podmaticí matice A.*

Definice 18 (Bloková matice). *Nechť A_{ij}, $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots m$ jsou takové matice, které splňují následující podmínky:*

- *pro pevně zvolené $i = 1, \dots, n$ mají matice A_{ij} stejný počet řádků $\forall j = 1, \dots, m$,*
- *pro pevně zvolené $j = 1, \dots, m$ mají matice A_{ij} stejný počet sloupců $\forall i = 1, \dots, n$.*

Matici

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

sestávající se z matic A_{ij} rozmístěných podle uvedeného schématu nazýváme blokovou maticí. Jednotlivé matice A_{ij} nazýváme bloky. Počet řádků blokové matice A je roven součtu počtu řádků všech matic A_{ij} pro libovolné pevné $j = 1, \dots, m$. Počet sloupců blokové matice A je roven součtu počtu sloupců všech matic A_{ij} pro libovolné pevné $i = 1, \dots, n$.

Definice 19 (Součet matic). *Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou dvě matice typu $n \times m$ nad komutativním okruhem R. Součtem matic A a B budeme nazývat matici $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ typu $m \times n$, ve které na pozici ij stojí součet prvků, které jsou v maticích A a B na pozici ij.*

Definice 20 (Součin matic). *Nechť $A = (a_{ik})$ je matice typu $n \times m$ a $B = (b_{kj})$ je matice typu $m \times l$ nad komutativním okruhem R. Součinem matic A a B budeme nazývat matici $AB = (\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj})$ typu $n \times l$, ve které na pozici ij stojí součet součinů odpovídajících si prvků i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.*

Definice 21 (Kroneckerův součin matic). *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $n \times m$ a $B = (b_{ij})$ je matice typu $k \times l$ nad komutativním okruhem R. Kroneckerovým součinem matic A a B budeme nazývat blokovou matici $A \otimes B = (a_{ij}B)$ typu $nk \times ml$, která je tvořena nm bloky a_{ij}-násobků matice B.*

Definice 22 (Hodnost matice). *Nechť A je matice typu $n \times m$ nad polem T. Hodností $r(A)$ matice A nazýváme dimenzi vektorového prostoru generovaného sloupci matice A jakožto vektory prostoru T^n.*

Lemma 1. *Nechť jsou dány matice $B = (b_{ij})_{l \times m}$, $C = (c_{jk})_{m \times n}$ o hodnostech $r(B)$, $r(C)$. Potom platí*

$$r(BC) \leq \min\{r(B), r(C)\}.$$

Důkaz.

Podívejme se nejprve na vyjádření matice BC typu $l \times n$:

$$BC = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} b_{1j}c_{j1} & \sum_{j=1}^{m} b_{1j}c_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} b_{1j}c_{jn} \\ \sum_{j=1}^{m} b_{2j}c_{j1} & \sum_{j=1}^{m} b_{2j}c_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} b_{2j}c_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} b_{lj}c_{j1} & \sum_{j=1}^{m} b_{lj}c_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} b_{lj}c_{jn} \end{pmatrix}.$$

Prozkoumáme-li podrobněji vektor u_k, který je k-tým sloupcem matice BC, můžeme odvodit následující rovnost:

$$u_k = \begin{pmatrix} b_{11}c_{1k} + b_{12}c_{2k} + \dots + b_{1m}c_{mk} \\ b_{21}c_{1k} + b_{22}c_{2k} + \dots + b_{2m}c_{mk} \\ \vdots \\ b_{l1}c_{1k} + b_{l2}c_{2k} + \dots + b_{lm}c_{mk} \end{pmatrix} = c_{1k} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{l1} \end{pmatrix} + c_{2k} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{l2} \end{pmatrix} + \dots + c_{mk} \begin{pmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ \vdots \\ b_{lm} \end{pmatrix}.$$

Každý vektor u_k, $k = 1, \dots, n$, je lineární kombinací vektorů, které tvoří sloupce matice B. Vektorový prostor generovaný vektory u_k, $k = 1, \dots, n$, neboli sloupci matice BC, je tedy podprostorem vektorového prostoru generovaného vektory tvořenými sloupci matice B.

Dimenze vektorového prostoru generovaného sloupci matice BC je proto menší nebo rovna dimenzi vektorového prostoru generovaného sloupci matice B

([1], Věta 8.21). A protože je hodnost matice rovna dimenzi vektorového prostoru generovaného jejími sloupci, je $r(BC) \leq r(B)$.

Podívejme se na celou situaci znovu, tentokrát z pohledu řádků. Využijeme vlastnost, že hodnost $r(C)$ matice C je rovna dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky matice C (viz [1], Důsledek 12.27).

Obdobně jako je každý vektor ve sloupci matice BC lineární kombinací vektorů ve sloupcích matice B, je každý vektor v řádku matice BC lineární kombinací vektorů v řádcích matice C. Dimenze vektorového prostoru generovaného řádky matice BC je proto menší nebo rovna dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky matice C, a tedy $r(BC) \leq r(C)$.

Z předchozích dvou nerovností plyne

$$r(BC) \leq \min\{r(B), r(C)\}.$$

□

Definice 23 (Determinant). *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem R. Determinantem* $\det A$ *matice A nazveme součet*

$$\sum_{P \in \mathbb{S}_n} sgn\, P \cdot a_{P(1)1} a_{P(2)2} \dots a_{P(n)n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace P symetrické grupy $\mathbb{S}_n$ všech permutací n-prvkové množiny.

Dále budeme pro výpočet determinantu využívat jeho následující vlastnosti (viz [1], Věta 14.7 a Věta 14.11):

- Přičteme-li k některému řádku (sloupci) čtvercové matice A lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců) matice A, je determinant takto vzniklé matice roven determinantu matice A.
- Determinant horní trojúhelníkové matice, tedy čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n takové, že $\forall i, j = 1, \dots, n$, $i > j$, je $a_{ij} = 0$, je roven součinu všech prvků její hlavní diagonály.
- Determinant matice A a determinant matice A^T k ní transponované jsou si rovny.
- Determinant matice, v níž jsou některé řádky (sloupce) jakožto vektory lineárně závislé, je roven nule.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n > 1$ nad komutativním okruhem R. Potom $\forall j = 1, \dots, n$ platí

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \tag{1.1}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det A_{ji}, \tag{1.2}$$

kde A_{ij} značí matici řádu $n-1$, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

V případě použití rovnosti (1.1) budeme hovořit o rozvoji determinantu podle j-tého sloupce, v případě rovnosti (1.2) budeme hovořit o rozvoji determinantu podle i-tého řádku.

1.2 Teorie grafů

Následující definice nám představí některé základní pojmy z teorie grafů. V případě hlubšího zájmu o některou z pasáží teorie grafů se může čtenář obrátit na knihu B. Bollobáse [2], ze které budeme vycházet.

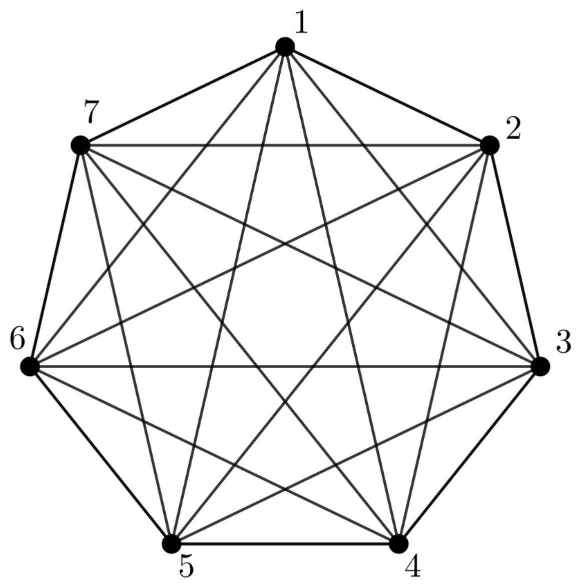
Definice 24 (Graf). *Nechť V je neprázdná konečná množina a E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V. Uspořádanou dvojici $G = \langle V, E\rangle$ nazýváme grafem. Prvky množiny V nazýváme vrcholy grafu G a prvky množiny E hranami grafu G.*

Chceme-li se odkázat na množinu vrcholů nějakého známého grafu G, použijeme symbol $V(G)$. Obdobně množinu hran grafu G značíme $E(G)$. Říkáme, že hrana e prochází vrcholy u a v, nebo že hrana e spojuje vrcholy u, v, jestliže $e = \{u, v\}$.

Definice 25 (Nakreslení grafu). *Nakreslením grafu $G = \langle V, E\rangle$ budeme nazývat reprezentaci grafu v rovině, kde vrcholům grafu odpovídají navzájem různé body roviny a hranám odpovídají oblouky rovinných křivek, jejichž krajními body jsou body roviny odpovídající vrcholům, kterými příslušné hrany prochází.*

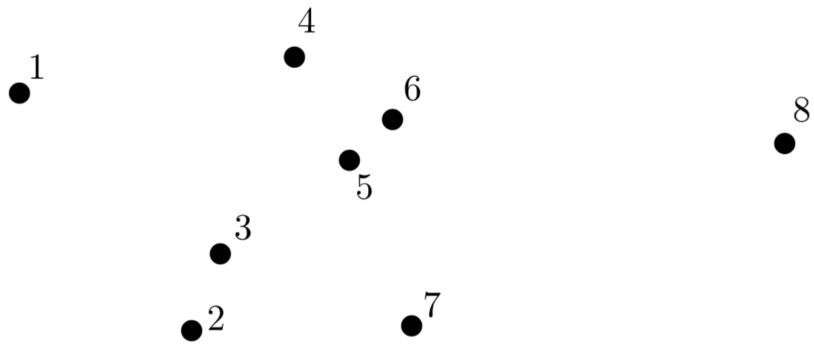
Nyní si zavedeme některé důležité typy grafů spolu s jejich standardním značením. Užitečnou pomůckou nám přitom budou obrázky s příklady nakreslení těchto grafů.

Definice 26 (Úplný graf). *Nechť $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$ a $E = \binom{V}{2}$, kde $\binom{V}{2}$ značí množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V. Graf $K_n = \langle V, E\rangle$ nazýváme úplným grafem. V úplném grafu jsou každé dva vrcholy spojené hranou.*



Obrázek 1.1: Úplný graf K_7.

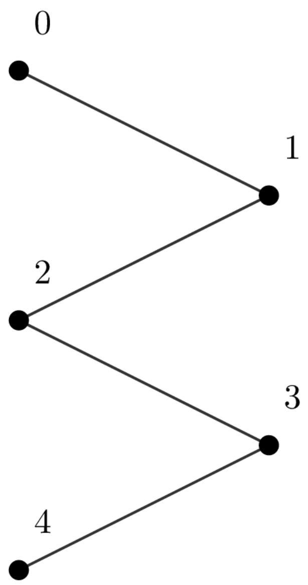
Definice 27 (Prázdný graf). Graf G nazýváme prázdným (nebo též diskrétním), jestliže $E(G) = \emptyset$.



Obrázek 1.2: Prázdný graf G.

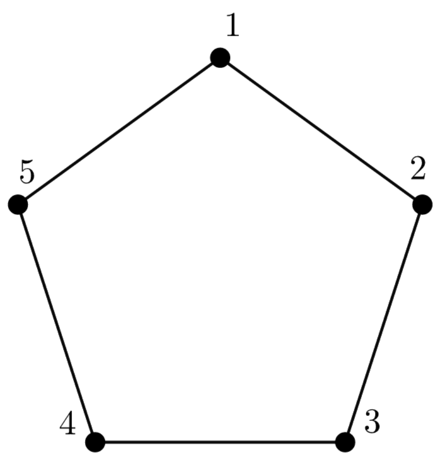
Definice 28 (Cesta). *Nechť je* $V = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$ *a* $E = \{\{i, i-1\};\ i = 1, \ldots, n\}$. *Graf* $P_n = \langle V, E \rangle$ *nazýváme cestou délky* n.[2]

[2] V případě potřeby bychom mohli zavést i cestu délky nula – graf s jediným vrcholem a žádnou hranou.



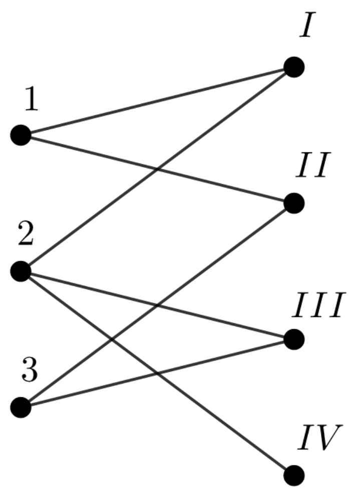
Obrázek 1.3: Cesta P_4.

Definice 29 (Kružnice). *Nechť* $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 3$ *a* $E = \{\{i, i+1\}; i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$. *Graf* $C_n = \langle V, E \rangle$ *nazýváme kružnicí (nebo též cyklem) délky* n.



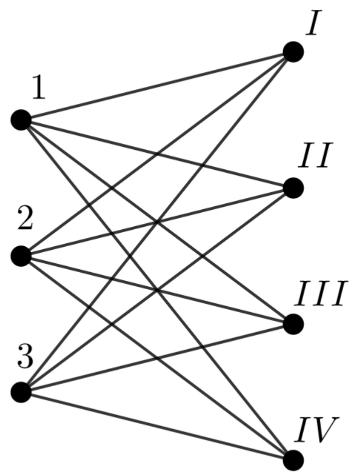
Obrázek 1.4: Kružnice C_5.

Definice 30 (Bipartitní graf, třídy vrcholů). *Nechť* V_1 *a* V_2 *jsou dvě neprázdné konečné disjunktní množiny s* n*, respektive* m *prvky. Nechť* $V = V_1 \cup V_2$ *a* $E \subseteq \{\{u, v\}; u \in V_1, v \in V_2\}$. *Graf* $B_{n,m} = \langle V, E \rangle$ *nazýváme bipartitním grafem, množinám* V_1 *a* V_2 *říkáme třídy vrcholů.*



Obrázek 1.5: Bipartitní graf $B_{3,4}$.

Definice 31 (Úplný bipartitní graf). *Nechť V_1 a V_2 jsou neprázdné konečné disjunktní množiny s n, respektive m prvky. Nechť $V = V_1 \cup V_2$ a $E = \{\{u, v\}; u \in V_1, v \in V_2\}$. Graf $K_{n,m} = \langle V, E\rangle$ nazýváme úplným bipartitním grafem.*



Obrázek 1.6: Úplný bipartitní graf $K_{3,4}$.

Definice 32 (Isomorfismus grafů). *Dva grafy $G = \langle V, E\rangle$ a $G' = \langle V', E'\rangle$ nazýváme isomorfní, jestliže existuje bijekce $f : V \to V'$ taková, že platí*

$$\{x, y\} \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \{f(x), f(y)\} \in E'.$$

Definice 33 (Podgraf). *Graf H nazveme podgrafem grafu G, je-li $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.*

Definice 34 (Souvislost grafu, komponenta). *Říkáme, že graf G je souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy $x, y \in V(G)$ existuje cesta P z x do y, která je podgrafem grafu G. Komponentou grafu nazýváme jeho maximální souvislý podgraf.*

Definice 35 (Strom). *Stromem nazýváme souvislý graf neobsahující kružnici.*

Definice 36 (Kostra). *Nechť $G = \langle V, E\rangle$ je graf. Každý strom $G' = \langle V, E'\rangle$, kde $E' \subseteq E$, nazýváme kostrou grafu G.*

Pokud v následujícím textu o grafu G s vrcholy $1, \ldots, n$ bez dalšího určení řekneme, že je kostra, myslíme tím kostru úplného grafu K_n. Říkáme tím vlastně, že G je strom. Poznamenejme ještě, že anglická terminologie je o něco intuitivnější – kostra grafu (*spanning tree*) je stromem (*tree*) překlenujícím všechny jeho vrcholy (*spanning*).

Lemma 2. *Graf G je kostra právě tehdy, když pro každé dva vrcholy $x, y \in V(G)$ existuje právě jedna cesta z x do y.*

Důkaz. Nechť graf G je kostra. Pak je graf G souvislý, a tedy pro každé dva vrcholy $x, y \in V(G)$ existuje alespoň jedna cesta z x do y. Předpokládejme, že existují dvě různé cesty z x do y. Sjednocením těchto cest je graf obsahující alespoň jednu kružnici. Graf G však žádné kružnice neobsahuje, čímž docházíme ke sporu.

Nechť v grafu G existuje pro každé dva vrcholy $x, y \in V(G)$ právě jedna cesta z x do y. To znamená, že graf G je podle definice souvislosti souvislý. Graf G navíc neobsahuje žádnou kružnici. Pokud by totiž obsahoval kružnici, která by procházela vrcholy x a y, potom by existovaly dvě různé cesty z x do y, a tím bychom došli ke sporu. Graf G je souvislý graf bez kružnic, a tedy graf G je kostra.

□

Lemma 3. *Nechť graf G je kostra s vrcholy $1, \ldots, n$ a hranami $e_1, \ldots, e_k$. Potom platí*

$$k = n - 1.$$

Důkaz. Je snadné ověřit, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, 3$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro kostry s méně než n vrcholy.

Nechť G je kostra s n vrcholy. Nechť $e \in E(G)$ je hrana spojující vrcholy $x, y \in V(G)$. Odebráním hrany e z grafu G vznikne nesouvislý graf G' se dvěma komponentami G_1 a G_2. Grafy G_1 a G_2 jsou souvislé grafy neobsahující kružnice, a tedy kostry.

Pro počet n_1 vrcholů grafu G_1 a počet n_2 vrcholů grafu G_2 platí $n_1 + n_2 = n$. Dále platí $n_1 < n$, $n_2 < n$. Označme k_1 a k_2 počet hran grafů G_1 a G_2. Potom je podle indukčního předpokladu $k_1 = n_1 - 1$ a $k_2 = n_2 - 1$. Pro počet hran k grafu G tedy platí

$$k = k_1 + k_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1.$$

□

Definice 37 (Stupeň vrcholu, izolovaný vrchol). *Nechť G je graf a v jeho vrchol. Symbolem $\deg_G(v)$ označme počet hran grafu G obsahujících vrchol v. Číslo $\deg_G(v)$ nazýváme stupněm vrcholu v grafu G. Je-li $\deg_G(v) = 0$, nazýváme vrchol v izolovaným vrcholem.*

Definice 38 (Disjunktní grafy). *O grafech G a G' řekneme, že jsou (hranově) disjunktní, jestliže $E(G) \cap E(G') = \emptyset$.*

Definice 39 (Disjunktní pokrytí grafu). *Nechť G je graf a $G_1, \dots G_m$ jsou jeho navzájem disjunktní podgrafy. Říkáme, že grafy $G_1, \dots G_m$ disjunktně pokrývají graf G, jestliže*

$$\bigcup_{k=1}^{m} E(G_k) = E(G).$$

Definice 40 (Orientovaný graf). *Nechť V je neprázdná konečná množina a E je podmnožina kartézského součinu $V \times V$. Uspořádanou dvojici $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ nazýváme orientovaným grafem. Prvky množiny E nazýváme orientované hrany (nebo šipky). Orientovaná hrana e je tedy uspořádaná dvojice $\langle x, y \rangle$, kde $x, y \in V$. Říkáme, že tato orientovaná hrana vychází z vrcholu x a končí ve vrcholu y. Vrchol x nazveme začátkem orientované hrany e, vrchol y koncem orientované hrany e.*

Bude-li z kontextu zřejmé, že hovoříme o orientovaném grafu, budeme jeho orientované hrany volně nazývat jednoduše hranami.

Pokud řekneme, že volíme orientaci grafu G, myslíme tím, že pro každou hranu $e_k \in V(G)$ určíme jeden její vrchol jako začátek a druhý jako konec. Volbou orientace grafu G je jednoznačně dán orientovaný graf $\vec{G}$, proto mezi orientací a orientovaným grafem nebudeme dále rozlišovat a rovněž orientaci budeme značit $\vec{G}$.

2. Matice sousednosti

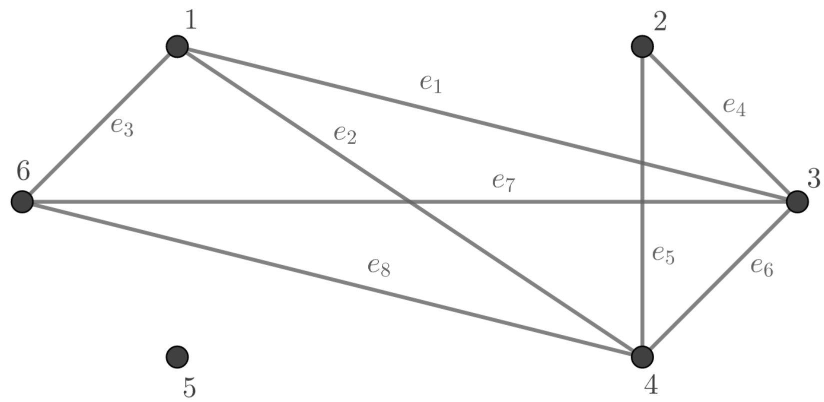
V předchozí kapitole, která nám připomíná některé základní poznatky, jsme si představili graf jako uspořádanou dvojici sestávající se z množiny všech vrcholů a množiny všech hran. Dále jsme se seznámili s interpretací grafu nakreslením do roviny. Jednou z dalších možností, jak graf jednoznačně popsat, je využití matice s prvky 0 a 1. V této kapitole se seznámíme s reprezentací grafu pomocí matice sousednosti, kapitola 5 nás potom provede jednoznačným určením grafu pomocí incidenční matice.

Definice 41 (Matice sousednosti). *Nechť je dán graf G s vrcholy $1, \dots, n$ a hranami $e_1, \dots, e_k$, $k \geq 1$. Matici $A_G = (a_{ij})_{n\times n}$ nazýváme maticí sousednosti grafu G, jestliže*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{pro } \{i,j\} \in E(G),\ i \neq j, \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

2.1 Vlastnosti matice sousednosti

Pojďme si ukázat matici sousednosti na příkladu konkrétního grafu. Uvažujme graf G s vrcholy $1, \dots, 6$ a hranami $e_1 = \{1,3\}$, $e_2 = \{1,4\}$, $e_3 = \{1,6\}$, $e_4 = \{2,3\}$, $e_5 = \{2,4\}$, $e_6 = \{3,4\}$, $e_7 = \{3,6\}$, $e_8 = \{4,6\}$.



Obrázek 2.1: Graf G.

Graf G má šest vrcholů, proto má matice sousednosti A_G grafu G šest řádků a šest sloupců, kde každý řádek a každý sloupec odpovídá jednomu vrcholu. Na pozici ij v matici A_G najdeme podle definice číslo 1 v případě, že vrcholy i, j spojuje hrana, a číslo 0, pokud vrcholy i, j nespojuje žádná hrana. Matice sousednosti A_G grafu G tak vypadá následovně:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A_G je, stejně jako všechny matice sousednosti, symetrická. Zápis $\{i, j\}$ a $\{j, i\}$ totiž reprezentuje jednu a tu samou množinu, tudíž i jedinou hranu, a proto je $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, \ldots, 6$. Na diagonále matice sousednosti nalezneme samé nuly, neboť hrany, které spojují vrchol se sebou samým (tzv. smyčky), definice grafu nepřipouští.

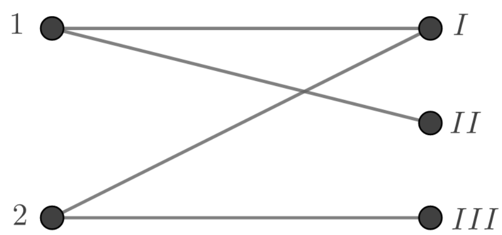
Součet prvků v i-tém řádku, stejně jako součet prvků v i-tém sloupci, matice A_G je roven stupni vrcholu i. V daném řádku a také sloupci je totiž každá hrana, která vrcholem i prochází, reprezentována jednou jedničkou, zatímco na zbylých pozicích jsou samé nuly. Každá hrana grafu G je v matici reprezentována dvěma jedničkami, totiž ve dvou různých řádcích odpovídajících vrcholům, kterými hrana prochází. Součet všech prvků matice A_G je proto roven číslu 16, tedy dvojnásobku počtu hran grafu G.

Podívejme se nyní na některé speciální typy grafů a prozkoumejme jejich matice sousednosti:

- **Úplný graf $\mathbf{K_n}$** – V úplném grafu K_n pro každé dva různé vrcholy existuje právě jedna hrana, která jimi prochází. Proto jsou v matici sousednosti na všech pozicích mimo diagonálu jedničky, zatímco na hlavní diagonále jsou samé nuly.

- **Prázdný graf** – Maticí sousednosti prázdného grafu, tedy grafu neobsahujícího žádné hrany, je nulová matice O_n. Řád n matice sousednosti je roven počtu vrcholů prázdného grafu. Je-li v některém grafu izolovaný vrchol (vrchol, kterým neprochází žádná hrana), je příslušný řádek i sloupec odpovídající danému vrcholu nulový. Protože jsou v prázdném grafu všechny vrcholy izolované, jsou také všechny řádky a sloupce jeho matice sousednosti nulové.

- **Bipartitní graf** – Ukažme si matici sousednosti bipartitního grafu na příkladu konkrétního grafu. Mějme bipartitní graf $B_{2,3} = \langle V, E\rangle$, kde $V = \{1, 2\} \cup \{I, II, III\}$ a $E = \{\{1, I\}, \{1, II\}, \{2, I\}, \{2, III\}\}$.



Obrázek 2.2: Graf $B_{2,3}$.

Matice sousednosti A_B grafu $B_{2,3}$ vypadá následovně:

$$A_B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & I & II & III \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ I \\ II \\ III \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Na první pohled odhalíme, že se jedná o blokovou matici, jejíž diagonálu tvoří nulové podmatice řádu dva a tři. Vezmeme-li libovolný bipartitní graf $B_{m,n}$ a seřadíme jeho vrcholy tak, že na prvních m pozic umístíme vrcholy první třídy a za ně potom n vrcholů druhé třídy, dostaneme matici sousednosti ve tvaru

$$A_B = \begin{pmatrix} O_m & C_{m\times n} \\ C^T_{n\times m} & O_n \end{pmatrix}.$$

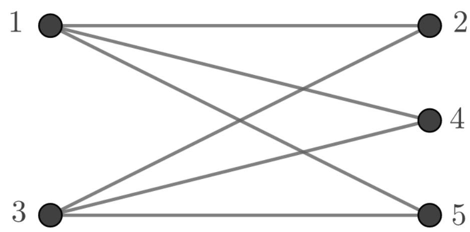
2.2 Pokrývání úplnými bipartitními grafy

Předtím než se budeme věnovat pokrývání úplných grafů úplnými bipartitními grafy, zavedeme si právě pro úplné bipartitní grafy jednu modifikaci matice sousednosti, která se nám bude hodit při dokazování Grahamovy–Pollakovy věty. Motivaci problému pokrývání úplnými bipartitními grafy jsme spolu s důkazem Grahamovy–Pollakovy věty převzali z knihy J. Matouška a J. Nešetřila [14].

Definice 42 (Redukovaná matice sousednosti). *Nechť $\langle V_1, V_2\rangle$ je uspořádaná dvojice neprázdných konečných disjunktních množin s n, respektive m prvky, $r = n + m$. Nechť $K_{n,m}$ je úplný bipartitní graf s třídami vrcholů V_1 a V_2. Matici $\overline{A}_K = (\overline{a}_{ij})_{r\times r}$ nazýváme redukovanou maticí sousednosti grafu $K_{n,m}$, pokud*

$$\overline{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i \in V_1 \text{ a } j \in V_2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jak se liší matice sousednosti A_K úplného bipartitního grafu od jeho redukované matice sousednosti[1] $\overline{A}_K$? Porovnejme nyní tyto dvě matice na příkladu úplného bipartitního grafu $K_{2,3}$ s třídami vrcholů $\{1, 3\}$ a $\{2, 4, 5\}$:



Obrázek 2.3: Graf $K_{2,3}$.

$$A_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V matici sousednosti každého úplného bipartitního grafu najdeme vždy řádky dvou typů. Řádky odpovídající vrcholům z první třídy jsou navzájem shodné

[1] Uvedený název není ustáleným matematickým termínem, pro potřeby této kapitoly je však výhodné si výše definovanou matici pojmenovat.

vektory s jedničkami na pozicích se sloupcovými indexy z druhé třídy vrcholů a nulami všude jinde. Naopak řádky matice sousednosti odpovídající vrcholům z druhé třídy jsou navzájem shodné vektory s jedničkami na pozicích s indexy z první třídy vrcholů a nulami všude jinde.

Redukovaná matice sousednosti se odlišuje v tom, že se číslo jedna může objevit pouze v těch řádcích, jejichž index najdeme v první třídě vrcholů. Řádky s indexy v druhé třídě vrcholů jsou proto nulové vektory a hodnost redukované matice sousednosti je vždy rovna jedné.

Na rozdíl od matice sousednosti je v redukované matici sousednosti každá hrana grafu v matici zastoupena právě jednou jedničkou, proto je součet všech prvků matice roven počtu hran. Navíc platí pro matici sousednosti A_G a redukovanou matici sousednosti $\overline{A}_G$ vztah $A_G = \overline{A}_G + \overline{A}_G^T$.

Vraťme se však k problému pokrývání úplného grafu K_n úplnými bipartitními grafy. Co vlastně máme takovým pokrytím na mysli? Hledáme takové bipartitní grafy $B_1, \ldots, B_m$, pro které platí:

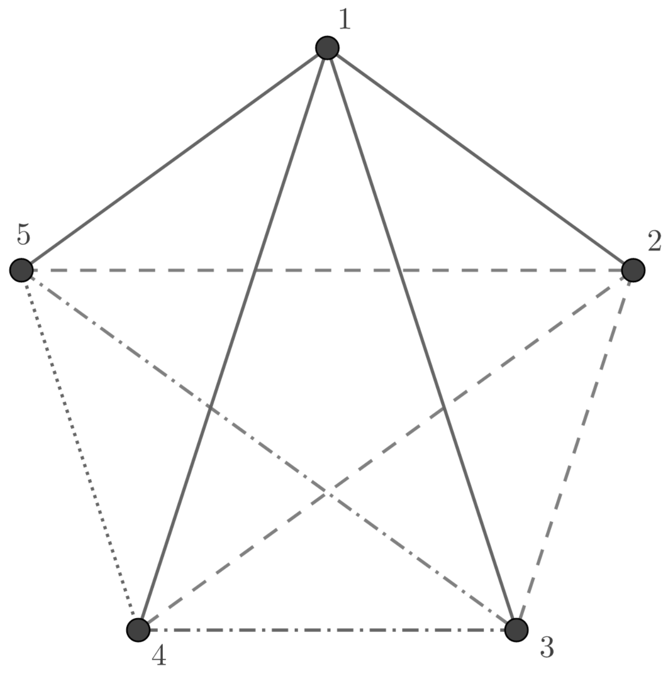
- $V(B_k) \subseteq V(K_n), \forall k = 1, \ldots, m$
  (vrcholy bipartitních grafů tvoří pouze vrcholy úplného grafu K_n),
- $E(K_n) = \bigcup_{k=1}^{m} E(B_k)$
  (sjednocení množin hran všech bipartitních grafů je množina všech hran úplného grafu),
- $E(B_k) \cap E(B_l) = \emptyset, \forall k, l = 1, \ldots, m,\ k \neq l$
  (množiny hran každých dvou různých bipartitních grafů jsou navzájem disjunktní množiny).

Ukažme si nejprve, jak můžeme úplnými bipartitními grafy pokrýt například úplný graf K_5 (obrázek 2.4). Vezměme nejprve všechny hrany grafu K_5, které prochází vrcholem 1 (na obrázku 2.4 jsou znázorněny plnou čarou). Tyto hrany jsou právě všechny hrany úplného bipartitního grafu $B_1 = K_{1,4}$, kde $V(B_1) = \{1\} \cup \{2,3,4,5\}$. Všechny zbylé hrany úplného grafu K_5, které nejsou obsaženy v $E(B_1)$, tvoří všechny hrany úplného grafu K_4 s vrcholy $\{2,3,4,5\}$. Tímto se nám podařilo úplný graf K_5 disjunktně pokrýt úplným bipartitním grafem B_1 a úplným grafem K_4:

$$\begin{array}{ll} B_1 = K_{1,4}, & V(B_1) = \{1\} \cup \{2,3,4,5\}, \\ K_4, & V(K_4) = \{2,3,4,5\}. \end{array}$$

Dále vezměme všechny hrany úplného grafu K_4 s vrcholy $\{2,3,4,5\}$, které prochází vrcholem 2 (na obrázku 2.4 jsou znázorněny čárkovanou čarou). Tyto hrany jsou právě všechny hrany úplného bipartitního grafu $B_2 = K_{1,3}$, kde $V(B_2) = \{2\} \cup \{3,4,5\}$. Všechny zbylé hrany úplného grafu K_4, které nejsou obsaženy v $E(B_2)$, tvoří všechny hrany úplného grafu K_3 s vrcholy $\{3,4,5\}$. Tímto způsobem můžeme úplný graf K_5 disjunktně pokrýt dvěma úplnými bipartitními grafy B_1, B_2 a úplným grafem K_3:

$$\begin{array}{ll} B_1 = K_{1,4}, & V(B_1) = \{1\} \cup \{2,3,4,5\}, \\ B_2 = K_{1,3}, & V(B_2) = \{2\} \cup \{3,4,5\}, \\ K_3, & V(K_3) = \{3,4,5\}. \end{array}$$



Obrázek 2.4: Pokrytí grafu K_5 čtyřmi úplnými bipartitními grafy.

Když budeme tímto způsobem postupovat dále, podaří se nám úplný graf K_5 disjunktně pokrýt těmito čtyřmi úplnými bipartitními grafy:

$$\begin{aligned} B_1 &= K_{1,4}, & V(B_1) &= \{1\} \cup \{2,3,4,5\}, \\ B_2 &= K_{1,3}, & V(B_2) &= \{2\} \cup \{3,4,5\}, \\ B_3 &= K_{1,2}, & V(B_3) &= \{3\} \cup \{4,5\}, \\ B_4 &= K_{1,1}, & V(B_4) &= \{4\} \cup \{5\}. \end{aligned}$$

Stejným způsobem bychom jistě dokázali pokrýt $n-1$ úplnými bipartitními grafy každý úplný graf K_n, $n \geq 2$. Předpokládejme, že dokážeme disjunktně pokrýt úplný graf K_{n-1} pomocí hran $n-2$ úplných bipartitních grafů. Dále podle výše uvedeného postupu vybereme z úplného grafu K_n jeden vrchol a hranami úplného bipartitního grafu $K_{1,n-1}$ pokryjeme všechny hrany jím procházející. Pak zbývá pokrýt hrany úplného grafu K_{n-1}, což podle indukčního předpokladu umíme.

Otázka, kterou řešili matematici R. L. Graham a H. O. Pollak v laboratořích telefonní společnosti Bell, je následující: „Jaký je nejmenší počet disjunktních úplných bipartitních grafů, kterými lze úplný graf K_n pokrýt?“ Právě jsme si ukázali postup, jakým je možné pokrýt úplný graf K_n hranami $n-1$ úplných bipartitních grafů. Graham s Pollakem jednoduchým způsobem ukázali, že lepší pokrytí neexistuje.

Věta 4 (Grahamova–Pollakova věta). *Buď K_n úplný graf s vrcholy $1, \ldots, n$. Nejmenší možný počet navzájem disjunktních úplných bipartitních grafů, jejichž sjednocením získáme úplný graf K_n, je alespoň roven číslu $n-1$.*

Důkaz. Mějme navzájem disjunktní úplné bipartitní grafy $B_1, \ldots, B_m$, které pokrývají všechny hrany úplného grafu K_n, tj.

$$
\begin{aligned}
&V(B_k) \subseteq V(K_n) = \{1, \ldots, n\}, \forall k = 1, \ldots, m,\\
&E(K_n) = \bigcup_{k=1}^{m} E(B_k),\\
&E(B_k) \cap E(B_l) = \emptyset, \forall k, l = 1, \ldots, m, k \neq l.
\end{aligned}
$$

Každému z úplných bipartitních grafů B_k přiřadíme redukovanou matici sousednosti $\overline{A}_k$. Grafy B_k mohou mít obecně různý počet vrcholů, a tím pádem i matice $\overline{A}_k$ mohou mít různý řád. Aby se nám s těmito maticemi lépe pracovalo, přidáme k nim nulové řádky a sloupce tak, aby měly všechny řád n. Pro každý vrchol $i = 1, \ldots, n$, $i \notin V(B_k)$, přidáme k matici $\overline{A}_k$ nulový řádek a sloupec a ve výsledné matici uspořádáme řádky a sloupce tak, aby jejich pořadí odpovídalo pořadí vrcholů grafu K_n. Takto vzniklou matici budeme značit symbolem A'_k. Jak jsme si ukázali výše, hodnost každé redukované matice sousednosti je rovna jedné a přidání nulových řádků a sloupců její hodnost nezmění.

Uvažujme nyní matici $A' = A'_1 + A'_2 + \cdots + A'_m$. Na diagonále každé z matic A'_k najdeme pouze nuly, proto i na diagonále matice A' najdeme pouze prvky rovné nule. Dále pro každou hranu $\{i, j\}$, $i \neq j$, úplného grafu K_n platí, že je součástí právě jednoho grafu B_k. To znamená, že pro daný graf B_k a matici A'_k je buď na pozici ij číslo jedna a na pozici ji číslo nula, nebo naopak na pozici ij číslo nula a na pozici ji číslo jedna, podle toho, jestli vrchol i patří do první nebo druhé třídy vrcholů. Pro všechny ostatní matice $A'_k = (a'_{ij})$ je $a'_{ij} = a'_{ji} = 0$. Odtud plyne vztah $A' + A'^T = J_n - I_n$, tedy že součet matice A' s maticí k ní transponovanou je roven matici řádu n, která má nuly na diagonále a jedničky na všech pozicích mimo diagonálu.

Protože hodnost součtu dvou matic je podle definice hodnosti zřejmě menší nebo rovna součtu hodností těchto matic, platí $r(A') \leq r(A'_1) + \cdots + r(A'_m) = m$. Ukážeme-li, že je hodnost $r(A')$ matice A' alespoň $n - 1$, jsme s důkazem hotovi.

Předpokládejme nyní, že $r(A') \leq n - 2$. Připišme dále k matici A' řádek samých jedniček. Vzniklá matice typu $(n + 1) \times n$ má hodnost nejvýše $n - 1$. Její sloupce jsou tedy lineárně závislé, a existuje tak netriviální lineární kombinace jejích sloupců rovna nulovému vektoru. Existuje tedy nenulový sloupcový vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ takový, že $A'x = (0, \ldots, 0)^T$ a zároveň $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Z poslední podmínky, kterou jsme získali připsáním řádku samých jedniček k matici A', plyne $J_n x = (0, \ldots, 0)^T$. Proto platí

$$x^T(A' + A'^T)x = x^T(J_n - I_n)x = x^T(J_n x) - x^T(I_n x) = 0 - x^T x = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0.$$

Zároveň je však

$$x^T(A' + A'^T)x = x^T(A'x) + (x^T A'^T)x = x^T(0, \ldots, 0)^T + (0, \ldots, 0)x = 0,$$

a to je spor.

□

3. Hadamardovy matice

V této kapitole, která vychází z článku M. Štěpánové [16], se budeme zabývat maticemi pojmenovanými podle francouzského matematika Jacquese Salomona Hadamarda (1865–1963). Takzvané Hadamardovy matice jsou čtvercové matice s prvky 1 a -1, jejichž řádky jsou, jakožto vektory, na sebe navzájem kolmé. Využití Hadamardových matic v reálném světě dosáhlo doslova vesmírných rozměrů. Na Hadamardových maticích je založen Hadamardův (někdy též Walshův) kód, což je samoopravný kód vhodný pro nespolehlivé komunikační kanály. V roce 1971 byl použit právě Hadamardův kód k přenosu fotografií ze sondy Mariner 9 z Marsu zpět na Zemi (viz disertační práci E. Suáreze [15]).[1]

Definice 43 (Hadamardova matice). *Čtvercovou matici H, jejíž prvky jsou pouze čísla 1 nebo -1 a každé dva různé řádky jsou na sebe kolmé, nazýváme Hadamardovou maticí.*

3.1 Vlastnosti Hadamardových matic

Zastavme se nyní na chvíli u otázky, co znamená, že jsou na sebe řádky matice kolmé. Uvažujme matici $H = (h_{ij})_{n\times n}$. Dva řádky k a l matice H jsou na sebe kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin nulový, tedy pokud $\sum_{j=1}^{n} h_{kj}h_{lj} = 0$. V případě řádků Hadamardovy matice, jejíž prvky tvoří pouze čísla ± 1, znamená kolmost řádků také to, že se každé dva různé řádky právě u poloviny prvků shodují a u poloviny liší. Z toho vyplývá, že je-li řád Hadamardovy matice větší než jedna, musí být nutně sudý.

Skalární součin řádkového vektoru Hadamardovy matice sama se sebou je roven $n \cdot 1 = n$. Z těchto pozorování vyplývá, že pro Hadamardovu matici H řádu n platí $HH^T = nI_n$, neboť na pozici kl v matici HH^T nalezneme skalární součin řádků k a l matice H. Navíc pokud předešlou rovnost vynásobíme nejprve zleva maticí H^{-1} a následně zprava maticí H, dostáváme

$$
\begin{aligned}
H^{-1}HH^T &= H^{-1}nI_n, \\
H^T &= nH^{-1}, \\
H^T H &= nH^{-1}H,
\end{aligned}
$$

neboli vztah

$$H^T H = nI_n.$$

Tato rovnost nám prozrazuje, že nejen řádky, ale i sloupce Hadamardovy matice jsou na sebe kolmé.

Zatím jsme se Hadamardovými maticemi zabývali obecně, aniž bychom si položili otázku, zda nějaká taková matice vůbec existuje. Zkusme si tedy pro některé nižší řády sestavit konkrétní Hadamardovu matici. Hadamardovy matice prvního řádu existují právě dvě: (1) a (-1).

Při sestavování Hadamardovy matice druhého řádu už musíme vzít v úvahu vzájemnou kolmost obou řádků. Jak jsme zmínili výše, kolmost řádků v případě

[1] Pro více informací o Hadamardových maticích odkazujeme na práci P. H. J. Lampia [9].

Hadamardových matic znamená to, že se řádky liší znaménkem právě u poloviny prvků. Začneme-li proto sestavovat Hadamardovu matici druhého řádu tak, že začneme prvním řádkem se dvěma jedničkami, musí mít druhý řádek obsahovat číslo 1 i číslo -1. Hadamardova matice druhého řádu tak může mít například následující tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hadamardovu matici třetího řádu se nám samozřejmě sestavit nepodaří, protože pro žádné liché $n > 1$ Hadamardova matice n-tého řádu neexistuje.

Hadamardovu matici čtvrtého řádu můžeme zkusit sestavit opět podle pravidla o rozdílnosti řádků u poloviny prvků:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sestavit zkusmo Hadamardovu matici pro některé další řády by se nám nejspíš podařilo, pojďme si však nyní ukázat systematický postup pro generování Hadamardových matic, takzvanou Sylvesterovu konstrukci.

3.2 Sylvesterova konstrukce

Jak tedy elegantně konstruovat některé Hadamardovy matice? Začněme se dvěma Hadamardovými maticemi S_1 a S_2 prvního, respektive druhého řádu:

$$S_1 = (1), \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

a dále uvažujme Kroneckerův součin $S_2 \otimes S_2$, tj. matici

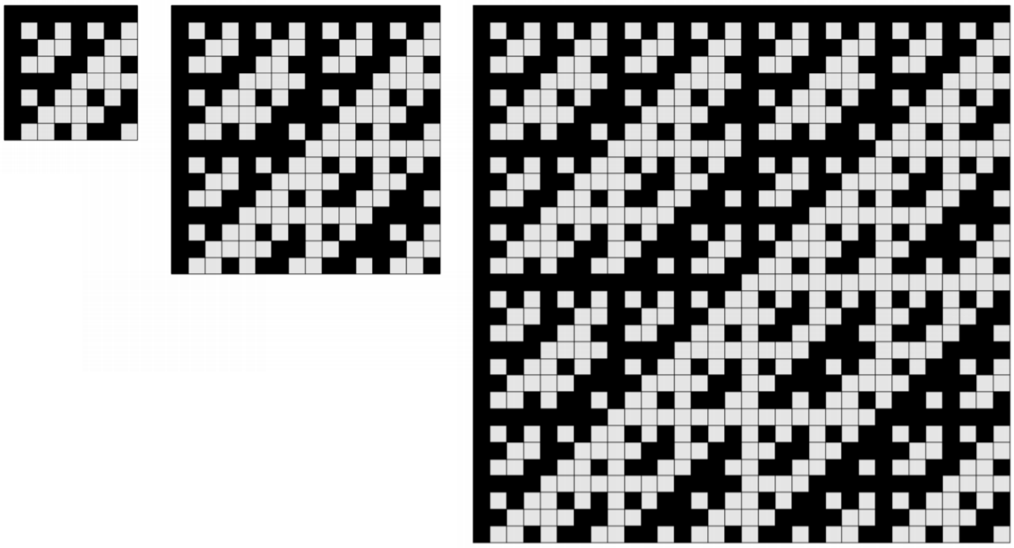
$$S_4 = S_2 \otimes S_2 = \begin{pmatrix} S_2 & S_2 \\ S_2 & -S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takto zkonstruovaná matice S_4 je opět Hadamardova, neboť si zachovala tu vlastnost, že se každý řádek liší od druhého právě u poloviny prvků, a tedy že jsou všechny řádky této matice navzájem kolmé. U první poloviny řádků totiž pouze dvakrát za sebou opakujeme řádky matice S_2, o kterých již víme, že jsou navzájem kolmé. U druhé poloviny řádků řadíme za řádky matice S_2 řádky matice S_2 s opačnými znaménky. Díky této konstrukci jsou navzájem kolmé nejen třetí se čtvrtým řádkem matice S_4, ale i třetí a čtvrtý řádek navzájem s prvním a druhým řádkem matice S_4.

Zvažme také Kroneckerovy součiny

$$S_8 = S_2 \otimes S_4,\ S_{16} = S_2 \otimes S_8,\ S_{32} = S_2 \otimes S_{16},\ \ldots,\ S_{2^k} = S_2 \otimes S_{2^k},\ \ldots$$

a jejich grafické vyjádření (obrázek 3.1), ve kterém číslo 1 zastupuje černý čtverec a číslo -1 zastupuje bílý čtverec.



Obrázek 3.1: Matice S_8, S_{16} a S_{32}.

Všechny tyto matice ve tvaru S_{2^k}, $k \in \mathbb{N}_0$, mají navzájem kolmé řádky, jsou to tedy Hadamardovy matice.

Definice 44 (Sylvesterova–Hadamardova matice). Nechť jsou dány matice

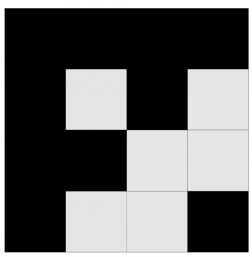
$$S_1 = (1),\ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a předpis $S_{2^k} = S_2 \otimes S_{2^{k-1}}$, $k \geq 2$. Matici S_{2^k}, $k \in \mathbb{N}_0$, nazýváme Sylvesterovou–Hadamardovou maticí řádu 2^k.

Sylvesterovy–Hadamardovy matice mají mezi Hadamardovými maticemi výsadní postavení díky některým specifickým vlastnostem. Všechny Sylvesterovy–Hadamardovy matice jsou symetrické, v prvním řádku a prvním sloupci mají pouze prvek 1. Pro $k > 1$ je stopa těchto matic rovna číslu 0. Tu skutečně unikátní vlastnost Sylvesterových–Hadamardových matic si však teprve představíme.

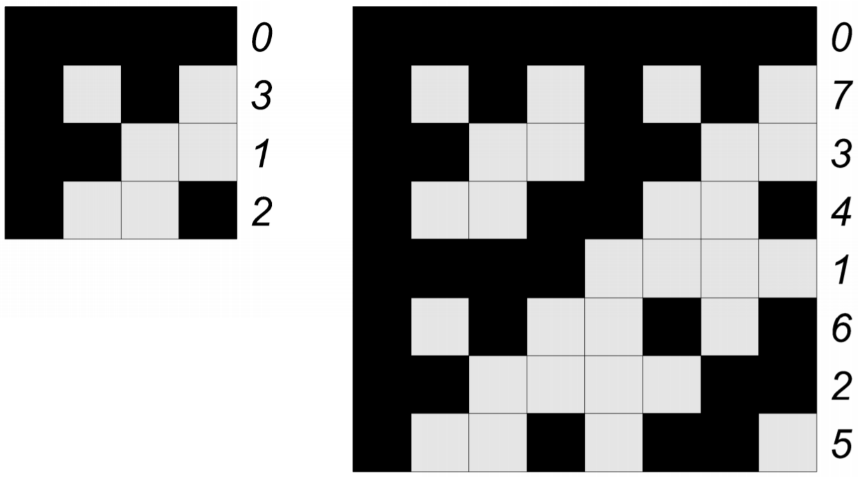
3.3 Počty změn znamének

Pojďme nyní prozkoumat, kolikrát se mění znaménko v řádcích Sylvesterovy–Hadamardovy matice. Začneme s maticí S_4, kterou si znázorníme pomocí výše použité mřížky, ve které černý čtverec zastupuje číslo 1 a bílý čtverec zastupuje číslo -1.



Obrázek 3.2: Matice S_4.

V prvním řádku matice S_4 se znaménko nezmění ani jednou, ve druhém řádku se změní znaménko třikrát, ve třetím řádku jednou a ve čtvrtém řádku dvakrát. Počty změn znamének v řádcích matice S_4 tedy tvoří všechna celá čísla z uzavřeného intervalu $[0; 3]$. Přitom právě v řádcích končících číslem 1 (černým čtvercem) jsou počty změn znamének sudá čísla. Prozkoumejme ještě počty změn znamének v řádcích matice S_8, v následujícím schématu zapsané na konci řádku.



Obrázek 3.3: Matice S_4 a S_8 s počty změn znamének v jednotlivých řádcích.

Počty změn znamének matice S_8 tvoří opět všechna celá čísla z uzavřeného intervalu $[0; 7]$. A opět platí, že sudý počet změn znamének najdeme právě v řádcích končících číslem 1. Abychom ukázali, že to není jen náhoda, zanalyzujme nyní počty změn znamének v řádcích matice S_8 vzhledem k matici S_4. Připomeňme si, že matici S_8 můžeme chápat jako blokovou matici

$$S_8 = \begin{pmatrix} S_4 & S_4 \\ S_4 & -S_4 \end{pmatrix}$$

a že všechny prvky prvního sloupce každé Sylvesterovy–Hadamardovy matice jsou rovny číslu jedna. Situaci si rozdělíme na dva případy podle řádků matice S_8:

- 1.–4. řádek

  Počet změn znamének v prvním až čtvrtém řádku matice S_8 závisí jednak na počtu změn znamének v příslušném řádku matice S_4 a také na tom, jakým prvkem řádek matice S_4 končí. Na posledním prvku v řádku matice S_4 totiž závisí to, jestli dojde ke změně znaménka mezi čtvrtým a pátým prvkem v řádku matice S_8. Na páté pozici bude jistě číslo 1 a ke změně znaménka v tomto místě dojde jen tehdy, pokud příslušný řádek matice S_4 končí číslem -1.

  Označme počet změn znamének v i-tém řádku matice S_4 symbolem p_i. Končí-li i-tý řádek, $1 \leq i \leq 4$, matice S_4 číslem -1, dochází mezi čtvrtým a pátým prvkem i-tého řádku matice S_8 ke změně znaménka a počet změn znamének v i-tém řádku matice S_8 je roven číslu $2p_i+1$. Končí-li naopak i-tý řádek matice S_4 číslem 1, nedochází mezi čtvrtým a pátým prvkem i-tého řádku matice S_8 ke změně znaménka a počet změn znamének v i-tém řádku matice S_8 je roven číslu $2p_i$.

- 5.–8. řádek

  V pátém až osmém řádku matice S_8 je na páté pozici ve všech řádcích číslo -1. Proto ke změně znaménka mezi čtvrtým a pátým prvkem dojde právě tehdy, když příslušný řádek matice S_4 končí číslem 1.

  Tedy končí-li i-tý řádek matice S_4 číslem 1, je počet změn znamének v $(i+4)$-tém řádku matice S_8 roven číslu $2p_i + 1$. Končí-li naopak i-tý řádek matice S_4 číslem -1, je počet změn znamének v $(i+4)$-tém řádku matice S_8 roven číslu $2p_i$.

Jak jsme právě ukázali, počty změn znamének v řádcích matice S_8 netvoří všechna celá čísla z uzavřeného intervalu $[0; 7]$ pouhou náhodou. Pro každé celé číslo z uzavřeného intervalu $[0; 3]$ dostaneme totiž jak jeho dvojnásobek, tak i dvojnásobek zvětšený o jedna. Navíc se dá výše uvedený rozbor aplikovat na libovolnou Sylvesterovu–Hadamardovu matici. Proto tvoří počty změn znamének v řádcích každé Sylvesterovy–Hadamardovy matice S_{2^k}, $k \in \mathbb{N}_0$, všechna celá čísla z uzavřeného intervalu $[0; 2^k - 1]$.

3.4 Hadamardova domněnka

Vraťme se nyní opět k obecným Hadamardovým maticím a shrňme si, co jsme doposud zjistili o jejich existenci a konstrukci pro různé řády. Nejprve jsme našli příklady Hadamardových matic řádu 1, 2 a 4. Vyloučili jsme existenci Hadamardových matic s lichým řádem větším než jedna. Poté jsme představili konstrukci Sylvesterových–Hadamardových matic řádu 2^k. Stále se tak nabízí otázka: Existují Hadamardovy matice všech sudých řádů?

Odpověď na tuto otázku nám pomůže upřesnit následující věta. Předtím však definujeme dva důležité pojmy – normalizovaná Hadamardova matice a H-ekvivalence Hadamardových matic.

Definice 45 (Normalizovaná H. matice, H-ekvivalence). *Hadamardovu matici, v jejímž prvním řádku a prvním sloupci nalezneme pouze prvek 1, nazýváme normalizovanou Hadamardovou maticí. Dvě Hadamardovy matice se nazývají H-ekvivalentní, pokud lze přejít od jedné k druhé pouze pomocí H-ekvivalentních operací – permutací řádků, resp. sloupců, a vynásobením některých řádků, resp. sloupců, číslem* -1.

Poznamenejme ještě, že každá Hadamardova matice je H-ekvivalentní s nějakou normalizovanou Hadamardovou maticí.

Věta 5. *Nechť H je Hadamardova matice řádu n, $n \geq 4$. Potom je číslo n dělitelné čtyřmi.*

Důkaz. Uvažujme normalizovanou Hadamardovu matici H řádu n, $n \geq 4$. Sloupce matice H lze uspořádat tak, aby její první tři řádky byly ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ & \underbrace{\hphantom{1 \dots 1}}_{a} & & & \underbrace{\hphantom{1 \dots 1}}_{b} & & & \underbrace{\hphantom{1 \dots 1}}_{c} & & & \underbrace{\hphantom{1 \dots 1}}_{d} & \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d značí počet sloupců v jednotlivých skupinách.

Tyto řádky musí splňovat podmínku vzájemné ortogonality. Přidáme-li k tomu fakt, že součet prvků v prvním řádku musí být roven číslu n, dostaneme následující rovnice:

$$\begin{aligned}
a+b+c+d &= n,\\
a+b-c-d &= 0,\\
a-b+c-d &= 0,\\
a-b-c+d &= 0.
\end{aligned}$$

Sečteme-li tyto čtyři rovnice, dostaneme výsledek $4a = n$, čímž je věta dokázána. $\square$

Nyní si můžeme odpovědět na otázku, zda Hadamardova matice existuje pro každý sudý řád. Odpověď je ne, neexistuje. Nabízí se však otázka nová. Existuje pro každé přirozené n dělitelné čtyřmi nějaká Hadamardova matice řádu n? Sám Jacques Hadamard předpokládal, že odpověď na tuto otázku je kladná. Tato takzvaná Hadamardova domněnka dodnes zůstává otevřeným problémem matematiky. Během minulého století přišli matematici s několika dalšími možnostmi konstrukcí Hadamardových matic. Přesto byla například Hadamardova matice řádu 428 poprvé představena až v roce 2005 v článku H. Kharaghaniho a B. Tayfeh-Rezaie [8]. Nejmenším řádem, který je dělitelný čtyřmi a pro který zatím nejsme schopni Hadamardovu matici sestavit, je dnes číslo 668 (viz např. článek M. Štěpánové [16]).

4. Incidenční matice systému podmnožin

Tato kapitola nás zavede do malebného města Lišákova. Pomocí lineární algebry rozklíčujeme řešení místního problému s přílišným počtem spolků ve městě. Zadání příkladu je spolu s obecným řešením převzaté z knihy J. Matouška [13].

Příklad 1 (Spolky města Lišákova). *Ve městě Lišákově žije n obyvatel. Nejoblíbenější zábavou lišákovských občanů je sdružovat se do rozličných spolků. Tuto svou zálibu ale dovedli do takové krajnosti, že začala ohrožovat samotné fungování města. Proto se městští radní rozhodli omezit počet spolků následujícími pravidly:*

- *Každý spolek musí mít lichý počet členů.*
- *Každé dva různé spolky musí mít sudý počet společných členů.*

Jaký největší počet spolků může v Lišákově[1] za takových podmínek vzniknout?

4.1 Modelový Lišákov

Než začneme příklad řešit obecně, podívejme se na jeden modelový Lišákov. Žije v něm celkem dvanáct obyvatel: Marie a Jiří Novákovi; Jana, Jan, Péťa a Evička Svobodovi; Hana, Josef a Pavlík Novotných; a nakonec ještě Anna, Martin a Kačka Dvořákovi. Během let v obci založili celkem osm spolků:

- **čtenářský klub (ČK)** navštěvují Marie, Jiří, Jana, Pavlík a Anna,
- do **radioklubu (RK)** se zapsali Jiří, Jana, Jan, Martin a Kačka,
- do **kroužku ručních prací (KRP)** chodí Péťa, Evička a Hana,
- členy **rybářského svazu (RS)** jsou Evička, Hana a Josef,
- v **pěveckém sboru (PS)** zpívají Jiří, Jana, Evička, Hana a Pavlík,
- trasy **Klubu českých turistů (KČT)** značí Jiří, Jana, Evička, Hana a Anna,
- v **Sokolu (S)** cvičí Marie, Jana, Jan, Péťa, Hana, Josef a Martin,
- v **ochotnickém divadelním spolku (ODS)** hrají Marie, Jiří, Jan, Péťa, Josef a Kačka.

[1] Ze zadání příkladu je zřejmé, že název Lišákov toho nemá moc společného s liškami, jako spíše s lichostí. V anglickém originále knihy J. Matouška [13], stejně jako jinde v anglické literatuře, nese město název „Oddtown“. Jde o slovní hříčku využívající mnohoznačnosti anglického slova „odd“, které můžeme přeložit jednak jako „lichý“, jednak také jako „podivínský“. Poznamenejme ještě, že název Lišákov uvádí sám J. Matoušek například ve svém česky psaném materiálu [12].

Vytvořme nyní matici $A = (a_{ij})$, ve které přehledně zaznamenáme výše popsaná členství. Každý řádek matice bude odpovídat jednomu občanovi a každý sloupec jednomu spolku. Máme-li v našem případě 12 občanů a 8 spolků, bude matice A typu 12×8. Na pozici ij bude prvek 1, pokud občan v i-tém řádku patří do spolku v j-tém sloupci, a prvek 0, pokud do spolku v j-tém sloupci nepatří. Pro náš modelový Lišákov bude matice A vypadat takto:

$$\begin{array}{lc} & \begin{matrix} \text{ČK} & \text{RK} & \text{KRP} & \text{RS} & \text{PS} & \text{KČT} & \text{S} & \text{ODS} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Marie} \\ \text{Jiří} \\ \text{Jana} \\ \text{Jan} \\ \text{Péťa} \\ \text{Evička} \\ \text{Hana} \\ \text{Josef} \\ \text{Pavlík} \\ \text{Anna} \\ \text{Martin} \\ \text{Kačka} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Součet prvků ve sloupci matice říká, kolik má vybraný spolek členů. Naopak součet prvků v řádku matice prozrazuje, v kolika spolcích se angažuje příslušný lišákovský občan. Součet všech prvků matice A si potom můžeme představit jako počet všech členských legitimací vydaných spolky města Lišákova svým členům (je-li např. Marie členkou tří různých spolků, má tři členské legitimace).

Podívejme se nyní, jestli by současné rozložení spolků v Lišákově vyhovělo pravidlům městské rady. První pravidlo říká, že každý spolek musí mít lichý počet členů. To v našem případě platí pro všechny spolky s výjimkou ochotnického spolku, který má šest členů. Poznamenejme ještě, že prvním pravidlem radní automaticky zakazují spolky, které nemají žádné členy.

Druhé pravidlo městské rady říká, že každé dva spolky musí mít sudý počet společných členů. Toto pravidlo naopak vylučuje, aby při dodržení prvního pravidla byli v některém spolku zapsáni všichni lišákovští občané, pokud tento spolek není jediným spolkem ve městě. Co kdyby měl Lišákov lichý počet obyvatel a všichni se rozhodli cvičit v Sokole? Potom už ale nejde založit například pěvecký sbor vyhovující prvnímu městskému pravidlu, tedy s lichým počtem členů. Všichni zpěváci by totiž byli zároveň sokolové a počet společných členů sboru a Sokola by byl stejný jako počet všech zpěváků, totiž lichý.

Zkontrolujme druhé městské pravidlo u našeho modelového Lišákova. Počet společných členů dvou spolků ověříme snadno pomocí maticového vyjádření. Chceme-li například zjistit, kolik společných členů má Sokol a ochotnický spolek, zaměříme se na příslušné dva sloupce (sedmý a osmý) matice A a řádek po řádku, a tedy občan po občanovi, budeme porovnávat hodnoty na příslušných pozicích.

Začneme u Marie, která navštěvuje obě dvě uvažovaná společenství, tj. jak Sokol, tak ochotnický spolek. Obě hodnoty v Mariině řádku jsou tedy rovny jedné – stejně tak jejich součin. Naopak Jiří chodí pouze do Sokola, příslušné hodnoty v Jiřího řádku jsou nula a jedna – jejich součin je roven nule. Dále se podívejme na Pavlíkův řádek. Pavlík nenavštěvuje ani jeden ze dvou uvedených spolků, obě příslušné hodnoty jsou rovny nule – nulový je pak i jejich součin.

Pokud tedy daný občan patří do obou uvedených spolků, je součin dvou odpovídajících hodnot v jeho řádku roven jedné. Naopak pokud občan nepatří do obou spolků zároveň, je součin roven nule. Počet všech společných členů Sokola a ochotníků, reprezentovaných sedmým a osmým sloupcem matice A, je tedy součet zmíněných součinů neboli $\sum_{l=1}^{12} a_{l7}a_{l8}$, kde koeficient l probíhá přes všech dvanáct občanů Lišákova. To ovšem není nic jiného než skalární součin dvou sloupcových vektorů, které reprezentují dva různé spolky.

Skalární součin dvou sloupců p a q matice A, tedy výraz $\sum_{l=1}^{12} a_{lp}a_{lq}$, najdeme na pozici pq v matici A^TA. K ověření druhého lišákovského pravidla nám tedy stačí spočítat součin A^TA a ověřit, že všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou sudá čísla. Matice A^TA pro náš modelový Lišákov je následující:

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5&2&0&0&3&3&2&2\\ 2&5&0&0&2&2&3&3\\ 0&0&3&2&2&2&2&1\\ 0&0&2&3&2&2&2&1\\ 3&2&2&2&5&4&2&1\\ 3&2&2&2&4&5&2&1\\ 2&3&2&2&2&2&7&4\\ 2&3&1&1&1&1&4&6 \end{pmatrix}.$$

Ve výsledné matici A^TA se mimo diagonálu objevuje několik lichých čísel, například v prvním řádku a pátém sloupci najdeme číslo 3. To znamená, že první a pátý spolek (čtenářský klub a pěvecký sbor) mají tři společné členy, čímž je porušeno druhé městské pravidlo. Náš modelový Lišákov by tedy ani před jedním z pravidel městské rady neobstál.

Přesto se ještě na chvíli vraťme k matici A^TA. Zatím jsme interpretovali význam prvků mimo diagonálu. Co však představují prvky na hlavní diagonále? Jde o skalární součin sloupce matice A se sebou samým neboli $\sum_{l=1}^{12} a_{lp}^2$, $p \in \{1, \ldots, 8\}$. Protože se v matici A objevují pouze čísla jedna a nula, platí $\sum_{l=1}^{12} a_{lp}^2 = \sum_{l=1}^{12} a_{lp}$, $p \in \{1, \ldots, 8\}$. To znamená, že čísla na hlavní diagonále matice A^TA představují součet prvků v příslušném sloupci matice A neboli počet všech pozic, na kterých je číslo jedna, čili počet všech občanů, kteří jsou zapojeni v odpovídajícím spolku. Proto prvky matice A^TA na hlavní diagonále musí být podle prvního městského pravidla lichá čísla. A jak jsme ukázali výše, prvky matice $A^T A$ mimo hlavní diagonálu musí být podle druhého městského pravidla naopak sudá čísla.

K ověření, zda konkrétní model Lišákova splňuje pravidla městské rady, tedy stačí zaznamenat spolky a občany do matice A a ověřit, zda jsou v matici $A^T A$ na hlavní diagonále pouze lichá čísla a mimo ni pouze sudá čísla. Jinak řečeno, Lišákov vyhovuje pravidlům právě tehdy, když je matice $A^T A$ nad polem $\mathbb{Z}_2$ rovna jednotkové matici I odpovídajícího řádu.

Zatím však nevíme, zda pro dvanáct občanů a osm spolků taková matice A vůbec existuje. Pojďme se proto vrátit k zadání příkladu a zjistit, jaký maximální počet spolků může při dodržení obou pravidel vzniknout.

4.2 Obecné řešení

Příklad budeme nyní řešit zcela obecně, ze všeho nejdříve si proto zavedeme značení, které budeme dále používat. Označme $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ množinu všech občanů města Lišákova a dále $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$, $S_i \subseteq O$, $\forall i = 1, \ldots, k$, $k \geq 1$, množinu všech jeho spolků. Vytvořme matici $A = (a_{ij})_{n\times k}$ stejným způsobem jako v případě modelového Lišákova: $a_{ij} = 1$, pokud občan o_i patří do spolku S_j, a $a_{ij} = 0$, pokud občan o_i nepatří do spolku S_j.

Dále sestrojme matici $A^T A$ řádu k. Na pozici v p-tém řádku a q-tém sloupci této matice najdeme skalární součin p-tého a q-tého sloupce matice A. Konkrétně jde o výraz $\sum_{l=1}^{n} a_{lp}a_{lq}$, který představuje počet společných členů spolků S_p a S_q (sčítací index l probíhá přes všech n obyvatel). V případě $p = q$ se jedná prostě o počet členů jednoho spolku.

První pravidlo městské rady říká, že každý spolek musí mít lichý počet členů, a proto musí mít matice $A^T A$ i v obecném případě na hlavní diagonále lichá čísla. Druhé pravidlo říká, že každé dva spolky musí mít sudý počet společných členů. Z toho plyne, že matice $A^T A$ má nutně na všech pozicích mimo hlavní diagonálu sudá čísla. Chceme-li tedy dodržet pravidla městské rady, která omezují existenci spolků, musí být matice $A^T A$ nad polem $\mathbb{Z}_2$ jednotková matice I_k řádu k.

Jelikož hodnost $r(I_k)$ matice I_k je vždy k a protože hodnost součinu dvou matic je podle lemmatu 1 nanejvýš rovna minimu hodností obou činitelů, je $r(A^T A) \leq \min\{r(A), r(A^T)\}$, z čehož dostáváme $k \leq r(A)$. Hodnost $r(A)$ matice A typu $n \times k$ může být zřejmě rovna nanejvýš n, tj. $r(A) \leq n$, z čehož vyplývá $k \leq n$. Lišákovští radní tedy svými pravidly stanovili, že počet spolků ve městě je nanejvýš roven počtu jeho občanů.

4.3 Existence vyhovujících Lišákovů

Z řešení vyplývá, že pokud je spolků více než občanů, není možné pravidla městské rady dodržet. Otázka je, jestli pro každých n občanů a k spolků, $k \leq n$, dokážeme najít nějaké vyhovující rozložení.

Nejjednodušším příkladem může být situace rozhádaného Lišákova. V takovém městě je všech n občanů navzájem na ostří nože a představa, že by měli nějaký spolek navštěvovat společně, je naprosto nemyslitelná. Proto si k z nich založí spolek, ve kterém není nikdo jiný než daný občan sám.

Každý takový klub má právě jednoho člena, tedy lichý počet. Žádné spolky nemají společné členy, počet společných členů každých dvou různých spolků je proto roven nule, tedy sudý. Tento Lišákov tak bez problémů splní obě lišákovská pravidla pro vytváření spolků. Tímto postupem dokážeme pro každé n a k, $k \leq n$, rozmístit n občanů do k spolků a vytvořit Lišákov, který bude vyhovovat pravidlům městské rady.

Právě jsme ukázali, že v modelovém Lišákově s osmi spolky můžeme právě osm z dvanácti občanů rozmístit do spolků v souladu s oběma pravidly městské rady. Naši Lišáci se však navzájem přátelí a rádi by navštěvovali spolky společně. Zkusme tedy upravit modelový Lišákov nějakým méně dramatickým způsobem, než je vytváření jednočlenných spolků.

Podívejme se, které konkrétní prvky matice $A^T A = (b_{ij})_{8\times 8}$ jsou v nepořádku:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Prvky $b_{15} = b_{51}$, $b_{16} = b_{61}$, $b_{27} = b_{72}$, $b_{28} = b_{82}$, $b_{38} = b_{83}$, $b_{48} = b_{84}$, $b_{58} = b_{85}$, $b_{68} = b_{86}$ by měly být sudé, naopak prvek b_{88} by měl být lichý. To znamená, že lichý počet společných členů mají dvojice spolků reprezentovaných v matici A sloupci 1 a 5, 1 a 6, 2 a 7, 2 a 8, 3 a 8, 4 a 8, 5 a 8, 6 a 8. Osmý spolek má navíc v rozporu s pravidly sudý počet členů.

Čtenářský klub (první sloupec) a pěvecký sbor (pátý sloupec) mají tři společné členy: Jiřího, Janu a Pavlíka. Jiří a Jana jsou zároveň členy několika dalších spolků, naopak Pavlík navštěvuje pouze tyto dva spolky. Proto když se Pavlík odepíše ze čtenářského klubu, bude to mít dva důsledky. Jednak se upraví počet společných členů čtenářského klubu a pěveckého sboru na dva, což je požadované sudé číslo. Jednak se počet členů čtenářského klubu sníží na čtyři, což je sudý počet odporující prvnímu pravidlu. To však záhy napravíme.

Čtenářský klub a Klub českých turistů (šestý sloupec) mají také tři společné členy: Jiřího, Janu a Annu. Jedině Anna navštěvuje pouze tyto dva spolky. Odhlásí-li se Anna ze čtenářského klubu, stanou se dvě věci. Zaprvé se sníží počet počet společných členů čtenářského klubu a Klubu českých turistů na dva, což je v souladu s druhým městským pravidlem. Zadruhé tím upravíme počet členů čtenářského klubu na tři, což je opět v souladu s prvním městským pravidlem.

Obdobně upravíme počty společných členů radioklubu (druhý sloupec) se Sokolem (sedmý sloupec) a ochotníky (osmý sloupec). Z radioklubu se odhlásí Martin, který navštěvoval pouze radioklub a Sokol. Dále přestane radioklub navštěvovat Kačka, která kromě toho chodila už jenom k ochotníkům. Těmito úpravami snížíme celkový počet členů radioklubu z pěti na tři, což je podle pravidel. Navíc o jedna snížíme počet společných členů radioklubu se Sokolem a s ochotníky na dva, čímž se dostaneme do souladu s druhým městským pravidlem.

Poslední, co nám zbývá, je vypořádat se s ochotnickým spolkem. Ten má v rozporu s prvním městským pravidlem šest členů. Navíc má v rozporu s druhým pravidlem sudý počet společných členů s kroužkem ručních prací (třetí sloupec), rybářským svazem (čtvrtý sloupec), pěveckým sborem (pátý sloupec) a Klubem českých turistů (šestý sloupec). Všechny tyto nesrovnalosti může vyřešit Evička, která je členkou všech čtyř výše zmíněných spolků. Pokud by se navíc dala k ochotníkům, jejich počet by se zvýšil na sedm. A navíc by se o jedna zvýšil společný počet ochotníků s kroužkem ručních prací, rybářským svazem, pěveckým sborem i Klubem českých turistů. Tím by se i ochotnický divadelní spolek dostal do souladu s pravidly městské rady.

Všechny výše popsané změny, společně s upravenou maticí pro Lišákov, který bezezbytku vyhovuje městským pravidlům, si můžeme prohlédnout na následujícím schématu:

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{matrix} \text{ČK} & \text{RK} & \text{KRP} & \text{RS} & \text{PS} & \text{KČT} & \text{S} & \text{ODS} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \text{Marie} \\ \text{Jiří} \\ \text{Jana} \\ \text{Jan} \\ \text{Péťa} \\ \text{Evička} \\ \text{Hana} \\ \text{Josef} \\ \text{Pavlík} \\ \text{Anna} \\ \text{Martin} \\ \text{Kačka} \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Pojďme si ještě výpočtem ověřit, že upravená matice A pro vyhovující Lišákov splňuje nutnou a postačující podmínku – tedy že odpovídající matice $A^T A$ je nad polem $\mathbb{Z}_2$ rovna jednotkové matici. Pokud bychom počítali nad polem $\mathbb{R}$ reálných čísel, je

$$
A^T A = \begin{pmatrix}
5 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 7
\end{pmatrix}.
$$

Po přechodu k poli $\mathbb{Z}_2$ proto platí

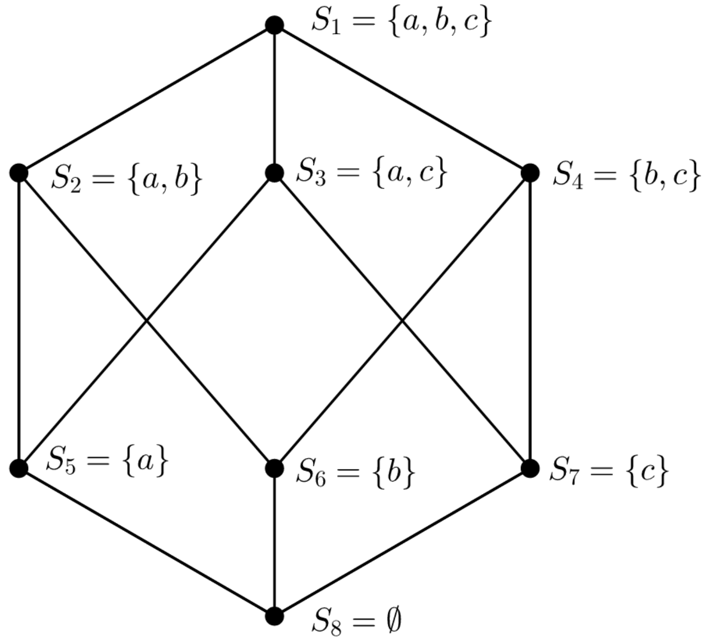
$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z výpočtu je zřejmé, že se nám skutečně modelový Lišákov se dvanácti obyvateli a osmi spolky podařilo upravit tak, že splňuje obě městská pravidla. Tedy nejen že vždy existuje triviální řešení (rozhádaný Lišákov), ale existuje i varianta, v níž jsou lišákovské spolky vícečlenné.

Stejným způsobem, jakým jsme konstruovali matici A pro množinu všech občanů a spolků města Lišákova, můžeme obdobnou matici zkonstruovat pro libovolnou množinu a systém jejích podmnožin.

Definice 46 (Incidenční matice systému podmnožin). *Nechť je dána neprázdná množina* $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ *a systém jejích podmnožin* $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$, $k \geq 1$, $S_j \subseteq M$, $\forall j = 1, \ldots, k$. *Matici* $A = (a_{ij})_{n \times k}$ *nazýváme incidenční maticí systému podmnožin* S *množiny* M, *jestliže*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } m_i \in S_j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 4.1: Prvky potenční množiny $P(M)$ množiny M.

Příkladem systému podmnožin nějaké množiny může být potenční množina, tedy množina všech podmnožin dané množiny. Uvažujme tříprvkovou množinu

$M = \{a, b, c\}$ a její potenční množinu $P(M) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$, která je spolu se značením jednotlivých podmnožin zakreslená na obrázku 4.1 (uspořádaná je vzhledem k inkluzi).

Sestavme nyní incidenční matici A_M množiny M systému všech podmnožin $P(M)$. Množina M má tři prvky, proto má matice A_M tři řádky. Potenční množina $P(M)$ má $2^3 = 8$ prvků, proto má matice A_M osm sloupců. Incidenční matice A_M vypadá následovně:

$$A_M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Každý z prvků množiny M je obsažen celkem ve čtyřech podmnožinách množiny M (v jedné tříprvkové, dvou dvouprvkových a jedné jednoprvkové), proto je v každém řádku matice A_M prvek 1 právě čtyřikrát. Počet jedniček v j-tém sloupci matice A_M indikuje, kolik má podmnožina S_j prvků.

Vzhledem k tomu, že potenční množina $P(M)$ obsahuje všechny podmnožiny množiny M, jsou sloupce incidenční matice A_M tvořeny všemi navzájem různými vektory o třech souřadnicích, které obsahují pouze prvky 1 nebo 0. Sloupce matice A_M tedy představují všech osm prvků pole $\mathbb{Z}_2^3$. Obdobně máme-li libovolnou konečnou n-prvkovou množinu N a její potenční množinu $P(N)$, představují sloupce incidenční matice A_N systému všech podmnožin $P(N)$ množiny N všech 2^n prvků pole $\mathbb{Z}_2^n$.

4.4 Konečná projektivní rovina

Jedním z příkladů množinových systémů se speciálními vlastnostmi jsou konečné projektivní roviny. Pojďme si proto ilustrovat incidenční matici právě na příkladu konečné projektivní roviny. Některé základní poznatky o konečných projektivních rovinách zde uvádíme bez důkazu. V případě hlubšího zájmu o konečné projektivní roviny se může čtenář obrátit na knihu J. Matouška a J. Nešetřila [14].

Definice 47 (Konečná projektivní rovina). *Nechť P je konečná množina a nechť L je systém podmnožin množiny P. Prvkům množiny P budeme říkat body, prvkům množiny L budeme říkat přímky. Uspořádanou dvojici $\langle P, L\rangle$ nazýváme konečnou projektivní rovinou právě tehdy, když splňuje následující axiomy:*

(i) *Každé dva různé body náleží právě jedné přímce.*

(ii) *Průnikem každých dvou různých přímek je právě jeden bod.*

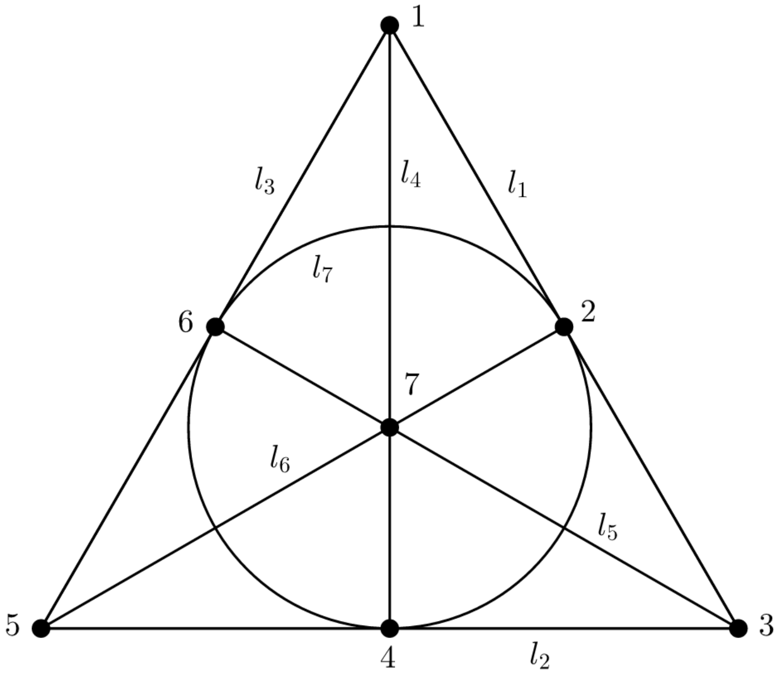
(iii) *Existuje taková čtyřbodová množina, že každá přímka je incidentní nejvýše se dvěma z těchto čtyř bodů.*

Vztah incidence bodu a přímky budeme volně popisovat tak, že přímka prochází bodem, respektive že bod leží na přímce.

Tvoří-li libovolnou přímku konečné projektivní roviny právě $n + 1$ různých bodů, potom leží na každé přímce konečné projektivní roviny právě $n+1$ různých bodů a každým bodem prochází právě $n+1$ různých přímek. Výše zmíněné číslo n

nazýváme řádem konečné projektivní roviny. Počet bodů konečné projektivní roviny řádu n je roven číslu $n^2 + n + 1$, což je zároveň počet všech přímek konečné projektivní roviny.

Nejmenší konečnou projektivní rovinou je tzv. Fanova rovina se sedmi body a sedmi přímkami. Uvažme Fanovu rovinu $F = \langle P, L\rangle$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $L = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 1\}, \{1, 4, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}\}$, která je znázorněná na obrázku 4.2 a jejíž řád je zřejmě 2.



Obrázek 4.2: Fanova rovina.

Pokud budeme chápat množinu L všech přímek Fanovy roviny jako systém podmnožin množiny P, tedy množiny všech bodů Fanovy roviny, můžeme sestavit incidenční matici $A_F = \{a_{ij}\}$ systému podmnožin L množiny P. Fanova rovina obsahuje sedm bodů, proto má matice A_F sedm řádků. Zároveň obsahuje Fanova rovina sedm přímek, proto má matice A_F sedm sloupců. Na pozici ij matice A_F bude prvek 1, jestliže bod i leží na přímce l_j, nebo prvek 0, jestliže bod i na přímce l_j neleží (označení přímek viz obrázek 4.2).

$$A_F = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pojďme se nyní zaměřit na tři axiomy konečné projektivní roviny, z nichž plynou některé speciální vlastnosti incidenční matice A_F Fanovy roviny. První axiom říká, že každé dva různé body náleží právě jedné přímce. Každé dva různé řádky incidenční matice A_F proto musí mít obě zároveň prvek 1 právě na jedné pozici (např. body 3 a 6 leží oba pouze na přímce l_5, proto je ve 3. a 6. řádku matice současně prvek 1 pouze na páté pozici). Proto skalární součin každých dvou různých řádků matice A_F je roven jedné.

Skalární součin řádku matice A_F sama se sebou pak bude vždy roven číslu 3, protože v každém řádku najdeme prvek 1 právě třikrát, neboť každým bodem Fanovy roviny prochází právě tři přímky.

S touto znalostí můžeme ihned poukázat na speciální tvar matice $A_F A_F^T$. V matici $A_F A_F^T$ na pozici ij totiž nalezneme skalární součin i-tého a j-tého řádku incidenční matice A_F. Každý prvek mimo hlavní diagonálu matice $A_F A_F^T$ je proto roven číslu 1 a každý prvek na hlavní diagonále je roven číslu 3:

$$A_F A_F^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Druhý axiom říká, že průnikem každých dvou různých přímek je právě jeden bod. Pro incidenční matici to znamená, že v každých dvou různých sloupcích je prvek 1 v obou sloupcích zároveň právě na jedné pozici (např. přímky l_1 a l_2 mají společný pouze bod 3, proto je v 1. a 2. sloupci současně prvek 1 pouze na třetí pozici). Skalární součin každých dvou různých sloupců matice A_F tedy musí být roven jedné. Navíc je skalární součin sloupce matice A_F sama se sebou roven číslu 3. V každém sloupci totiž nalezneme prvek 1 právě třikrát, neboť každá přímka Fanovy roviny prochází právě třemi body. Skalární součiny dvojic sloupců matice A_F tvoří prvky matice $A_F^T A_F$, která vypadá následovně:

$$A_F^T A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro incidenční matici A_F Fanovy roviny a matici A_F^T k ní transponovanou tak platí vztah

$$A_F A_F^T = A_F^T A_F.$$

Podle třetího axiomu existuje v konečné projektivní rovině taková čtyřbodová množina, že každá přímka je incidentní nejvýše se dvěma z těchto čtyř bodů. Jinými slovy existují čtyři body takové, že žádné tři z nich nejsou kolineární, tedy neleží na jedné přímce.

V kontextu incidenční matice A_F to znamená, že pokud ze čtyř řádků, které představují body Fanovy roviny splňující třetí axiom, sestavíme podmatici $\overline{A}_F$ matice A_F, bude v každém sloupci této podmatice typu 4×7 prvek 1 nejvýše dvakrát. Sestavme takovou podmatici $\overline{A}_F$ například pro body, resp. řádky 1, 3, 5 a 7:

$$\overline{A}_F = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Z podmatice $\overline{A}_F$ je zřejmé, že žádné tři z bodů 1, 3, 5 a 7 Fanovy roviny neleží na téže přímce, a body 1, 3, 5 a 7 proto vyhovují podmínce třetího axiomu.

5. Incidenční matice grafů

V následující kapitole se budeme věnovat incidenčním maticím neorientovaných i orientovaných grafů. Také si ukážeme, jak pomocí incidenční matice grafu určit počet jeho koster.

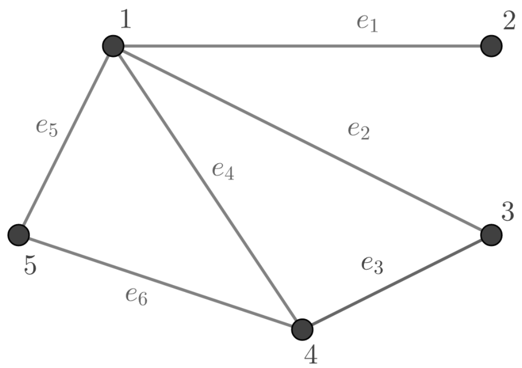
Incidenční matici (neorientovaného) grafu G vytvoříme jako incidenční matici systému podmnožin $E(G)$ množiny $V(G)$, neboť hrany grafu nejsou nic jiného než dvouprvkové podmnožiny množiny vrcholů grafu. Každý řádek incidenční matice grafu bude odpovídat jednomu vrcholu, každý sloupec jedné hraně. Na vybrané pozici v incidenční matici bude buď prvek 1, pokud příslušná hrana prochází daným vrcholem, a nebo prvek 0, pokud jím neprochází.

Definice 48 (Incidenční matice grafu). *Nechť je dán graf G s vrcholy $1, \ldots, n$ a hranami $e_1, \ldots, e_k$, $k \geq 1$. Matici $D_G = (d_{ij})_{n \times k}$ nazýváme incidenční maticí grafu G, jestliže*

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro vrchol } i \text{ náležející hraně } e_j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

5.1 Vlastnosti incidenční matice grafu

Nyní si ukažme, jak sestavit incidenční matici grafu na příkladu grafu G s vrcholy $1, \ldots, 5$ a hranami $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{1, 3\}$, $e_3 = \{3, 4\}$, $e_4 = \{1, 4\}$, $e_5 = \{1, 5\}$, $e_6 = \{4, 5\}$.



Obrázek 5.1: Graf G.

Graf G má pět vrcholů a šest hran, incidenční matice D_G má proto pět řádků a šest sloupců. Do matice D_G zapíšeme podle definice na pozici ij číslo 1, jestliže vrchol i náleží hraně e_j, a číslo 0, jestliže vrchol i hraně e_j nenáleží:

$$D_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

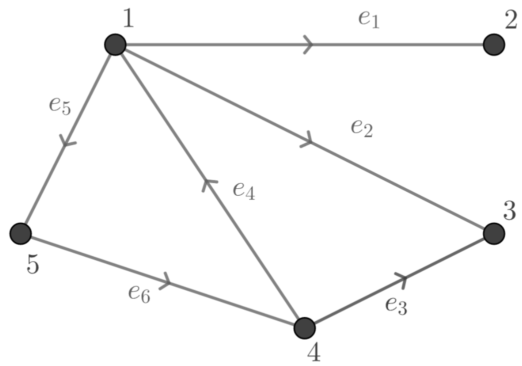
Uveďme nyní několik postřehů o incidenční matici. V každém jejím sloupci je číslo jedna právě dvakrát, protože každá hrana grafu prochází právě dvěma vrcholy. Na všech zbylých pozicích ve sloupcích najdeme nulu. Počet jedniček v řádku matice naopak značí, kolik hran prochází příslušným vrcholem. Součet prvků v řádku incidenční matice tedy značí stupeň příslušného vrcholu. Je-li například některý z řádků nulový, znamená to, že je odpovídající vrchol grafu izolovaný, tj. nenáleží žádné hraně.

Dále budeme pracovat zejména s incidenční maticí orientovaného grafu. Na rozdíl od incidenční matice neorientovaného grafu budeme rozlišovat, zda je daný vrchol začátkem či koncem hrany. Pokud orientovaná hrana z vrcholu vychází, bude na příslušné pozici v matici -1. Jestliže hrana ve vrcholu končí, zapíšeme do matice na odpovídající pozici číslo 1.

Definice 49 (Incidenční matice orientovaného grafu). *Nechť je dán orientovaný graf $\vec{G}$ s vrcholy $1, \ldots, n$ a hranami $e_1, \ldots, e_k$, $k \geq 1$. Matici $D_{\vec{G}} = (d_{ij})_{n \times k}$ nazýváme incidenční maticí orientovaného grafu $\vec{G}$, pokud*

$$d_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{je-li vrchol } i \text{ začátkem hrany } e_j, \\ 1, & \text{je-li vrchol } i \text{ koncem hrany } e_j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pojďme sestavit incidenční matici orientovaného grafu $\vec{G}$ s vrcholy $1, \ldots, 5$ a orientovanými hranami $e_1 = \langle 1, 2\rangle$, $e_2 = \langle 1, 3\rangle$, $e_3 = \langle 4, 3\rangle$, $e_4 = \langle 4, 1\rangle$, $e_5 = \langle 1, 5\rangle$, $e_6 = \langle 5, 4\rangle$.



Obrázek 5.2: Orientovaný graf $\vec{G}$.

Orientovaný graf $\vec{G}$ má pět vrcholů a šest hran, proto má jeho incidenční matice $D_{\vec{G}}$ pět řádků a šest sloupců. Na pozici ij incidenční matice $D_{\vec{G}}$ zapíšeme podle definice číslo -1, jestliže je vrchol i začátkem hrany e_j, číslo 1, jestliže je vrchol i koncem hrany e_j, a číslo 0, jestliže vrchol i hraně e_j nenáleží:

$$D_{\vec{G}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Následující pozorování platí nejen pro incidenční matici $D_{\vec{G}}$ konkrétního, námi uvedeného grafu, ale také pro incidenční matice všech orientovaných grafů. V každém sloupci incidenční matice orientovaného grafu bude na jediné pozici číslo 1, na jediné číslo -1 a na zbylých pozicích nuly. Součet prvků v každém sloupci je nulový. Nulový je tedy zároveň součet všech prvků incidenční matice.

Součet prvků v řádku může dopadnout třemi různými způsoby – může být kladný, záporný nebo nulový. Kladný součet značí, že v daném vrcholu více hran končí, než z něj vychází. Záporný součet naopak ukazuje, že z daného vrcholu více hran vychází, než v něm končí. Nulový součet v řádku znamená, že daný vrchol je začátkem i koncem stejného počtu hran.

Dodejme ještě, že incidenční maticí můžeme jednoznačně zadat libovolný orientovaný i neorientovaný graf. Incidenční matice jsou tak spolu s maticemi sousednosti, se kterými jsme se seznámili v kapitole 2, strukturami, pomocí nichž lze graf popsat jednoznačně (až na isomorfismus – přejmenování vrcholů grafu) popsat pomocí matice.

5.2 Incidenční matice a kostra

Následující lemma nám odhalí první souvislost mezi incidenčními maticemi a kostrami. Přesněji řečeno hovoří o tom, jak z incidenční matice poznáme, zda je daný graf kostrou. Výklad o souvislosti incidenční matice a počtu koster grafu v této kapitole je inspirován knihou J. Matouška a J. Nešetřila [14].

Lemma 6. *Buď T nějaký graf s vrcholy $1, 2, \dots, n$, s $n-1$ hranami, $n \geq 2$, a $\vec{T}$ nějaká jeho orientace. Buď $D_{\vec{T}}$ incidenční matice orientovaného grafu $\vec{T}$ a nechť $C_{\vec{T}}$ označuje matici vzniklou z matice $D_{\vec{T}}$ vynecháním jejího posledního řádku. Potom $\det C_{\vec{T}}$ je roven jedné z hodnot $0, 1, -1$ a je nenulový právě tehdy, když graf T je kostra.*

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí podle n (počet vrcholů).

Nejprve se podívejme na případ $n = 2$. Graf T má dva vrcholy, 1 a 2, a podle předpokladu jedinou hranu $e_1 = \{1, 2\}$. Takovýto graf T je kostrou.

Orientaci $\vec{T}$ můžeme zvolit dvěma různými způsoby – hrana e_1 vychází buď z vrcholu 1, nebo z vrcholu 2. Tomu odpovídají následující dvě incidenční matice:

$$D_{\vec{T}} = \begin{array}{c} \langle 1,2 \rangle \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ nebo } D'_{\vec{T}} = \begin{array}{c} \langle 2,1 \rangle \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vynecháním posledního řádku incidenční matice $D_{\vec{T}}$ vznikne matice $C_{\vec{T}}$ s jediným prvkem ± 1. Tedy graf T je kostra a $\det C_{\vec{T}}$ nabývá pouze hodnot ± 1.

Nyní uvažujme případ $n > 2$. Incidenční matice $D_{\vec{T}}$ orientovaného grafu $\vec{T}$ má n řádků, které odpovídají n vrcholům grafu $\vec{T}$, a $n-1$ sloupců, které odpovídají $n-1$ orientovaným hranám grafu $\vec{T}$. Vyškrtnutím posledního řádku matice $D_{\vec{T}}$ vytvoříme čtvercovou matici $C_{\vec{T}}$ řádu $n-1$. Řádky matice $C_{\vec{T}}$ odpovídají vrcholům $1, 2, \dots, n-1$ grafu $\vec{T}$.

Dále budeme rozlišovat dva případy klasifikované podle toho, jestli má některý z vrcholů $1, 2, \dots, n-1$ grafu T stupeň 1.

Nejprve předpokládejme, že existuje vrchol k, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, který má stupeň 1. To znamená, že matice $C_{\vec{T}}$ má v k-tém řádku jediný nenulový prvek, a to ve sloupci, který označíme l, $l \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Jedná se o prvek -1, pokud hrana e_l z vrcholu k vychází, nebo o prvek 1, pokud ve vrcholu k končí.

Determinant matice $C_{\vec{T}}$ vyjádříme pomocí rozvoje determinantu podle k-tého řádku. Protože se v tomto řádku nachází jediný nenulový prvek, a to v l-tém sloupci, je vyjádření determinantu následující:

$$\det C_{\vec{T}} = (-1)^{k+l} c_{kl} \det C'_{\vec{T}},$$

kde matice $C'_{\vec{T}}$ vznikne z matice $C_{\vec{T}}$ vyškrtnutím k-tého řádku a l-tého sloupce. Protože je $c_{kl} = \pm 1$, je $|\det C_{\vec{T}}| = \left|\det C'_{\vec{T}}\right|$.

Matici $C'_{\vec{T}}$ můžeme také získat vyškrtnutím posledního řádku z incidenční matice $D_{\vec{T'}}$ grafu $\vec{T'}$, kde graf $\vec{T'}$ vznikne z grafu $\vec{T}$ vynecháním vrcholu k a hrany e_l.

Podle indukčního předpokladu víme, že $\left|\det C'_{\vec{T}}\right|$ je roven 1, pokud T' je kostra, nebo je roven 0, pokud T' není kostra. Z grafu T jsme ale odstranili vrchol stupně jedna, a tak je T kostra právě tehdy, když T' je kostra. Tímto jsme udělali indukční krok pro případ, v němž má některý z vrcholů $1, 2, \ldots, n-1$ stupeň 1.

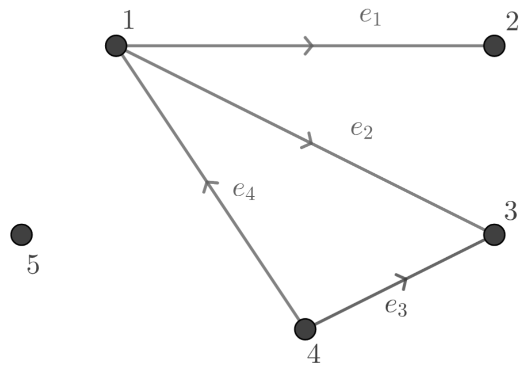
Zbývá nám prostudovat druhý případ, kdy žádný z vrcholů $1, 2, \ldots, n-1$ nemá stupeň jedna. Ukažme, že v takovém případě má graf T nutně izolovaný vrchol. Kdyby tomu tak nebylo, měly by vrcholy $1, 2, \ldots, n-1$ stupeň alespoň 2, vrchol n by měl stupeň alespoň 1, a součet stupňů vrcholů grafu by tedy byl nejméně $2n-1$. Nicméně s $n-1$ hranami dosáhneme pouze součtu stupňů vrcholů grafu $2n-2$. Graf T tedy má izolovaný vrchol, a tím pádem není kostrou.

Nyní stačí ukázat, že v tomto posledním uvažovaném případě je $\det C_{\vec{T}} = 0$. Je-li izolovaným vrcholem jeden z vrcholů $1, 2, \ldots, n-1$, přísluší mu v matici $C_{\vec{T}}$ nulový řádek. Je-li izolovaným vrcholem vrchol n, každý sloupec matice $C_{\vec{T}}$ obsahuje jak prvek 1, tak prvek -1, neboť matice $C_{\vec{T}}$ vznikla z incidenční matice $D_{\vec{T}}$ vynecháním n-tého řádku, který je nulový. Součet všech řádků matice $C_{\vec{T}}$ je tedy roven nulovému vektoru, a řádky jsou proto lineárně závislé. V obou případech je $\det C_{\vec{T}} = 0$.

□

Předtím než pokročíme dále v teorii, spočítáme hodnotu determinantu matice C pro dva konkrétní grafy splňující předpoklady lemmatu 6.

Uvažujme nejprve graf G s vrcholy $1, \ldots, 5$ a hranami $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{1, 3\}$, $e_3 = \{3, 4\}$, $e_4 = \{1, 4\}$. Dále uvažujme orientaci $\vec{G}$ grafu G s orientovanými hranami $e_1 = \langle 1, 2\rangle$, $e_2 = \langle 1, 3\rangle$, $e_3 = \langle 4, 3\rangle$, $e_4 = \langle 4, 1\rangle$ (obrázek 5.3).



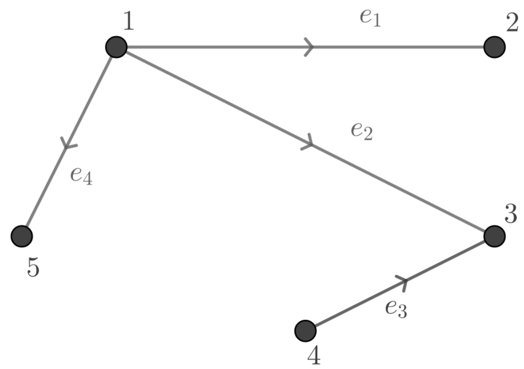
Obrázek 5.3: Orientace $\vec{G}$ grafu G.

Skutečnost, zda graf G je kostrou, nebo není, poznáme podle předchozího lemmatu z hodnoty determinantu matice $C_{\vec{G}}$, která vznikne z incidenční matice $D_{\vec{G}}$ vynecháním posledního řádku. Matice $D_{\vec{G}}$ a $C_{\vec{G}}$ vypadají následovně:

$$D_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si, že třetí sloupec matice $C_{\vec{G}}$ můžeme vyjádřit jako součet druhého a čtvrtého sloupce této matice. Sloupce matice $C_{\vec{G}}$ jsou tedy lineárně závislé a $\det C_{\vec{G}} = 0$. To znamená, že graf G není kostrou. Že graf G není kostrou můžeme také dovodit např. z faktu, že není souvislý, neboť obsahuje izolovaný vrchol 5, resp. obsahuje kružnici.

Nyní uvažujme graf H s vrcholy $1, \ldots, 5$ a hranami $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{1, 3\}$, $e_3 = \{3, 4\}$, $e_4 = \{1, 5\}$. Dále uvažujme orientaci $\vec{G}$ grafu G s orientovanými hranami $e_1 = \langle 1, 2\rangle$, $e_2 = \langle 1, 3\rangle$, $e_3 = \langle 4, 3\rangle$, $e_4 = \langle 1, 5\rangle$.



Obrázek 5.4: Orientace $\vec{H}$ grafu H.

Sestavme incidenční matici $D_{\vec{H}}$ a matici $C_{\vec{H}}$, která vznikne z incidenční matice vynecháním posledního řádku:

$$D_{\vec{H}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\vec{H}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant $\det C_{\vec{H}}$ můžeme spočítat například pomocí rozvoje determinantu podle druhého řádku:

$$\det C_{\vec{H}} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Determinant $\det C_{\vec{H}}$ je nenulový, a graf H je tedy kostrou.

Vraťme se ještě na chvíli k předpokladům lemmatu 6. Zkoumaný graf s n vrcholy má mít $n-1$ hran. Tento předpoklad zde není jen proto, aby nám po vyškrtnutí jednoho řádku z incidenční matice vznikla čtvercová matice, pro kterou můžeme spočítat determinant. Je zde především proto, že jiný počet hran kostra ani mít nemůže (lemma 3). Pokud tedy narazíme na graf, pro který tento předpoklad neplatí, můžeme o něm rovnou prohlásit, že není kostrou.

Navíc uveďme poznámku o matici $C_{\vec{T}}$, jejíž determinant rozhoduje o tom, zda je daný graf kostrou, nebo ne. Lemma říká, že matice $C_{\vec{T}}$ vznikne z incidenční matice $D_{\vec{T}}$ vynecháním posledního řádku. Ve skutečnosti můžeme matici $C_{\vec{T}}$ vytvořit vynecháním libovolného řádku incidenční matice. Vrcholy grafu totiž můžeme bez újmy na obecnosti přejmenovat, a tím změnit pořadí řádků incidenční matice.

Zrekapitulujme si, jak využijeme lemma 6 při hledání koster grafu. Mějme graf G s vrcholy $1, 2, \ldots, n$ a hranami $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Dále požadujme $k \geq n-1$, protože graf s méně než $n-1$ hranami podle lemmatu 3 žádnou kostru mít nemůže. Zvolme libovolnou orientaci $\vec{G}$ grafu G, zkonstruujme incidenční matici $D_{\vec{G}}$ této orientace. Označme symbolem $C_{\vec{G}}$ matici, která vznikne z incidenční matice $D_{\vec{G}}$ vynecháním posledního řádku.

Dále uvažujme podgraf T grafu G, který má $n-1$ hran a pro který platí $V(G) = V(T)$. Podle lemmatu 6 je podgraf T kostrou grafu G, pokud má pro libovolnou orientaci $\vec{T}$ matice $C_{\vec{T}}$ nenulový determinant. Jak však spolu souvisí matice $C_{\vec{G}}$ a $C_{\vec{T}}$?

Grafy G a T mají oba stejné vrcholy $1, 2, \ldots, n$, incidenční matice $D_{\vec{G}}$ a $D_{\vec{T}}$ tak mají obě n řádků. Vynecháním posledního řádku vzniknou z matic $D_{\vec{G}}$ a $D_{\vec{T}}$ matice $C_{\vec{G}}$ a $C_{\vec{T}}$, které mají obě $n-1$ řádků. Graf G má k hran, přičemž $n-1$ z nich tvoří graf T. Nějakou orientaci $\vec{T}$ grafu T tak můžeme získat vynecháním $k-n+1$ hran z grafu $\vec{G}$. Stejně můžeme matici $C_{\vec{T}}$ řádu $n-1$ uvažovat jako podmatici matice $C_{\vec{G}}$ typu $(n-1) \times k$, která vznikne vynecháním příslušných $k-n+1$ sloupců.

Graf T je tedy kostrou grafu G, pokud má příslušná podmatice $C_{\vec{T}}$ řádu $n-1$ matice $C_{\vec{G}}$ nenulový determinant. Z tohoto pozorování vyplývá důležitý výsledek pro hledání počtu koster grafu.

Důsledek 7. *Nechť je dán graf G s vrcholy $1, 2, \ldots, n$. Buď $\vec{G}$ libovolná orientace grafu G a $D_{\vec{G}}$ incidenční matice této orientace. Označme symbolem $C_{\vec{G}}$ matici, která vznikne z incidenční matice $D_{\vec{G}}$ vynecháním posledního řádku. Potom je počet koster grafu G roven počtu podmatic řádu $n-1$ matice $C_{\vec{G}}$ s nenulovým determinantem.*

Přestože nám tento výsledek dává jednoznačný návod pro výpočet koster grafu, pro přímý výpočet je značně nepraktický. Zkusme z něj proto odvodit přímější způsob výpočtu.

5.3 Laplaceova matice

Pojďme se podívat na význam matice, která vznikne vynásobením incidenční matice grafu s maticí k ní transponovanou. Tato matice bude hrát důležitou roli v důkazu další věty o počtu koster grafu.

Mějme graf G s vrcholy $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, a hranami $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Zvolme libovolnou orientaci $\vec{G}$ grafu G a uvažujme incidenční matici $D_{\vec{G}} = (d_{ij})_{n \times k}$ orientovaného grafu $\vec{G}$. Matice $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T = (l_{ij})$ je čtvercová řádu n, na pozici ij najdeme prvek $\sum_{m=1}^{k} d_{im} d_{jm}$, tedy skalární součin i-tého a j-tého řádku matice $D_{\vec{G}}$. Sčítací index m probíhá přes všechny sloupce incidenční matice $D_{\vec{G}}$, tedy přes všechny hrany grafu G.

V případě, že $i \neq j$, je prvek l_{ij} matice $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ skalární součin dvou různých řádků i, j incidenční matice $D_{\vec{G}}$. Řádky i, j odpovídají dvěma různým vrcholům grafu $\vec{G}$. Pokud tyto vrcholy spojuje nějaká hrana e_p, najdeme v obou řádcích i, j matice $D_{\vec{G}}$ ve sloupci p nenulový prvek. Konkrétně je v jednom z uvedených řádků prvek 1 a v druhém prvek -1. Jinou hranu vrcholy i, j nesdílí[1], a proto je v ostatních sloupcích matice $D_{\vec{G}}$ nenulový prvek nejvýše v jednom z těchto dvou řádků. Skalární součin řádků i, j incidenční matice $D_{\vec{G}}$ má proto jediný nenulový prvek $-1 \cdot 1$, a to na pozici p. Tudíž je v matici $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ na pozici ij prvek $l_{ij} = \sum_{m=1}^{k} d_{im} d_{jm} = -1$.

Jestliže dva různé vrcholy i, j grafu $\vec{G}$ nejsou propojené žádnou hranou, je v každém sloupci matice $D_{\vec{G}}$ nenulový prvek nejvýše v jednom z řádků i, j. Proto je skalární součin těchto řádků nulový a v matici $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ je na pozici ij prvek $l_{ij} = \sum_{m=1}^{k} d_{im} d_{jm} = 0$.

V případě, že $i = j$, je prvek $l_{ij} = l_{ii}$ na diagonále matice $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ skalární součin řádku i matice $D_{\vec{G}}$ sama se sebou, tedy $l_{ii} = \sum_{m=1}^{k} d_{im}^2$. Každé číslo ± 1 v i-tém řádku matice $D_{\vec{G}}$ reprezentuje jednu hranu grafu G, která je incidentní s vrcholem i, zbylé pozice v řádku jsou obsazeny nulou. To znamená, že výraz $\sum_{m=1}^{k} d_{im}^2 = \sum_{m=1}^{k} |d_{im}|$ značí stupeň vrcholu i grafu G. V matici $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ jsou tedy na diagonále prvky $l_{ii} = \deg_G(i)$.

Právě jsme ukázali, že pro graf G, zvolenou orientaci $\vec{G}$ a incidenční matici $D_{\vec{G}}$ orientace $\vec{G}$ vypadá prvek l_{ij} na pozici ij matice $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ následujícím způsobem:

- $l_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, pokud vrcholy i, j nespojuje žádná hrana,

[1] Vyšli jsme z neorientovaného grafu G, proto nepřipouštíme orientovaný graf $\vec{G}$ s existencí hran $\langle e_i, e_j \rangle$ i $\langle e_j, e_i \rangle$.

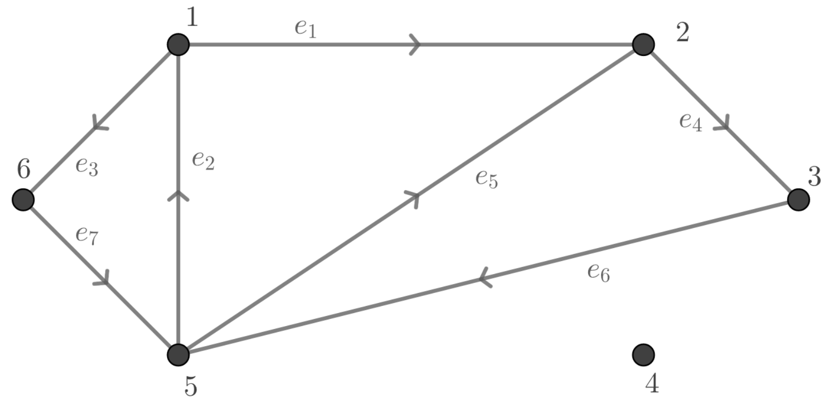
- $l_{ij} = -1$ pro $i \neq j$, pokud vrcholy i, j spojuje nějaká hrana,
- $l_{ij} = \deg_G(i)$ pro $i = j$.

Povšimněme si, že součin $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ vůbec nezávisí na volbě orientace $\vec{G}$. Matice $D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$, kterou jsme právě popsali, se nazývá Laplaceova a využijeme ji dále k hledání počtu koster grafu.

Definice 50 (Laplaceova matice). *Nechť je dán graf G s vrcholy $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, a hranami $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Matici $L = (l_{ij})_{n \times n}$ nazýváme Laplaceovou maticí grafu G, jestliže*

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg_G(i) & \textit{pro } i = j, \\ -1 & \textit{pro } \{i, j\} \in E(G),\ i \neq j, \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Ukažme si nyní výše uvedený výpočet Laplaceovy matice grafu pomocí incidenční matice některé orientace na příkladu grafu G s vrcholy $1, \ldots, 6$ a hranami $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{1, 5\}$, $e_3 = \{1, 6\}$, $e_4 = \{2, 3\}$, $e_5 = \{2, 5\}$, $e_6 = \{3, 5\}$, $e_7 = \{5, 6\}$. Dále budeme pracovat s orientací $\vec{G}$ grafu G s orientovanými hranami $e_1 = \langle 1, 2 \rangle$, $e_2 = \langle 5, 1 \rangle$, $e_3 = \langle 1, 6 \rangle$, $e_4 = \langle 2, 3 \rangle$, $e_5 = \langle 5, 2 \rangle$, $e_6 = \langle 3, 5 \rangle$, $e_7 = \langle 6, 5 \rangle$.



Obrázek 5.5: Orientace $\vec{G}$ grafu G.

Jak jsme si ukázali výše, následující výpočet je nezávislý na volbě konkrétní orientace:

$$D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = L.$$

Laplaceova matice má obecně některé speciální vlastnosti. Laplaceova matice je symetrická. Součet prvků v každém řádku i sloupci je nulový – každý řádek i sloupec totiž obsahuje číslo -1 tolikrát, kolik je stupeň příslušného vrcholu. Stopa Laplaceovy matice, tedy součet všech prvků na hlavní diagonále, je roven součtu stupňů všech vrcholů grafu, tedy dvojnásobku počtu všech jeho hran.

Pro zajímavost uveďme ještě souvislost Laplaceovy matice s maticí sousednosti, které jsme se věnovali v jedné z předešlých kapitol. K tomu potřebujeme nejprve zavést matici stupňů.

Definice 51 (Matice stupňů). *Nechť je dán graf G s vrcholy $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, a hranami $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Diagonální matici $S = (s_{ij})_{n \times n}$ nazýváme maticí stupňů grafu G, jestliže*

$$s_{ij} = \begin{cases} \deg_G(i) & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Po srovnání definic Laplaceovy matice, matice sousednosti a matice stupňů je zřejmé, že pro graf G s Laplaceovou maticí L, maticí sousednosti A a maticí stupňů S platí $L = S - A$.

Nyní využijeme výše odvozený vztah $L = D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$ k důkazu následujícího pomocného tvrzení.

Lemma 8. *Nechť G je graf s vrcholy $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, a hranami $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Buď $\vec{G}$ libovolná orientace grafu G a $D_{\vec{G}} = (d_{ij})$ incidenční matice této orientace. Označme symbolem $C_{\vec{G}}$ matici, která vznikne z incidenční matice $D_{\vec{G}}$ vynecháním posledního řádku. Potom $C_{\vec{G}} C_{\vec{G}}^T = L_{nn}$, kde L_{nn} značí Laplaceovu matici grafu G bez posledního řádku a posledního sloupce.*

Důkaz. V důkazu budeme vycházet z výše dokázané rovnosti $L = D_{\vec{G}} D_{\vec{G}}^T$. Pro prvky l_{ij} matice L platí $l_{ij} = \sum_{m=1}^{k} d_{im} d_{jm}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$.

Matice $C_{\vec{G}}$ značí incidenční matici $D_{\vec{G}}$ bez posledního řádku, proto je

$$C_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1k} \\ d_{21} & \ldots & d_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n-1,1} & \ldots & d_{n-1,k} \end{pmatrix}.$$

Matice $C_{\vec{G}}$ má $n-1$ řádků a k sloupců, matice $C_{\vec{G}} C_{\vec{G}}^T$ má tudíž řád $n-1$. Prvky l'_{ij} matice $C_{\vec{G}} C_{\vec{G}}^T$ mají podle pravidel pro násobení matic následující tvar $l'_{ij} = \sum_{m=1}^{k} d_{im} d_{jm}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n-1$. Prvky l'_{ij} matice $C_{\vec{G}} C_{\vec{G}}^T$ se pro všechna $i, j = 1, \ldots, n-1$ rovnají prvkům l_{ij} matice L, respektive matice L_{nn}. Skutečně tedy platí $C_{\vec{G}} C_{\vec{G}}^T = L_{nn}$.

□

Poslední pomocná věta, kterou nám zbývá uvést, je Cauchyova–Binetova věta o determinantu součinu dvou obdélníkových matic. Tato věta se dá formulovat obecně pro dvě libovolné matice, které lze násobit. My si však vystačíme se speciálním případem, který hovoří o determinantu součinu obdélníkové matice s maticí k ní transponovanou.

Věta 9 (Cauchyova–Binetova věta). *Nechť je dána matice A typu $n \times k$. Potom*

$$\det(AA^T) = \sum_I (\det A_I)^2,$$

kde se sčítá přes všechny n-prvkové podmnožiny I množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$ a kde A_I značí matici vzniklou z matice A vyškrtáním všech sloupců, jejichž indexy neleží v I.

Tuto větu zde nebudeme dokazovat, zájemci mohou důkaz Cauchyovy–Binetovy věty nalézt například v článku A. J. Hoffmana a C. W. Wu [5]. Zaměříme se však na některé speciální případy.

Pro $n = k$ bychom měli sčítat přes všechny n-prvkové podmnožiny I n-prvkové množiny – taková podmnožina je ale jenom jedna, množina sama. Proto dostáváme předpokládaný výsledek pro čtvercové matice:

$$\det(AA^T) = (\det A)^2.$$

Pokud je $n > k$, sčítáme přes všechny n-prvkové podmnožiny I k-prvkové množiny – žádná taková podmnožina pro $n > k$ neexistuje, a tak je v tomto případě $\det(AA^T) = 0$.

5.4 Přímý výpočet počtu koster

Následující věta shrnuje naše dosavadní výsledky z této kapitoly ve způsob přímého výpočtu počtu $\kappa(G)$ koster daného grafu G pomocí determinantu podmatice Laplaceovy matice.

Věta 10. *Pro každý graf G platí*

$$\kappa(G) = \det L_{nn},$$

kde $\kappa(G)$ značí počet koster grafu G a L_{nn} značí Laplaceovu matici grafu G bez posledního řádku a posledního sloupce.

Důkaz. Důkaz této věty vyplývá z lemmatu 6, důsledku 7, lemmatu 8 a věty 9. Označme $\vec{G}$ libovolnou orientaci grafu G, $D_{\vec{G}}$ incidenční matici této orientace a symbolem $C_{\vec{G}}$ matici $D_{\vec{G}}$ bez posledního řádku.

Důsledek 7 říká, že počet $\kappa(G)$ koster grafu G je roven počtu podmatic řádu $n-1$ matice $C_{\vec{G}}$, které mají nenulový determinant. Zároveň víme, že determinant těchto podmatic může nabývat pouze hodnot 0, 1, nebo -1.

Pokud aplikujeme Cauchyovu–Binetovu větu na matici $C_{\vec{G}}$ typu $(n-1) \times k$, dostaneme rovnost

$$\det(C_{\vec{G}} C_{\vec{G}}^T) = \sum_I (\det C_I)^2, \tag{5.1}$$

kde se sčítá přes všechny $(n-1)$-prvkové podmnožiny I množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$ a kde C_I značí matici vzniklou z matice $C_{\vec{G}}$ vyškrtáním všech sloupců, jejichž indexy neleží v I.

Rozeberme ještě situaci, kdy je počet hran k grafu G menší než $n-1$ a graf G nemá žádnou kostru (neboť kostra grafu musí mít právě $n-1$ hran). V tomto případě je $\sum_I (\det C_I)^2 = 0$, neboť neexistuje žádná $(n-1)$-prvková podmnožina k-prvkové množiny.

Nyní se zaměříme na sumu na pravé straně rovnosti (5.1). Matice C_I jsou přesně ty podmatice řádu $n-1$ matice $C_{\vec{G}}$, o kterých hovoří důsledek 7.

Pokud matice C_I reprezentuje jednu z koster grafu G, je $(\det C_I)^2 = 1$. Jestliže matice C_I reprezentuje podgraf, který není kostrou grafu G, je $(\det C_I)^2 = 0$. Proto je

$$\sum_I (\det C_I)^2 = \kappa(G). \tag{5.2}$$

Dále podle lemmatu 8 platí

$$C_{\vec{G}} C_{\vec{G}}^T = L_{nn}. \tag{5.3}$$

Z rovností (5.1), (5.2) a (5.3) plyne $\kappa(G) = \det L_{nn}$.

□

Výše uvedenou větou jsme podali jednoduchý návod k určení počtu koster daného grafu. Nakonec přidáme ještě jeden známý výsledek teorie grafů – Cayleyho formuli, která hovoří o počtu koster úplného grafu.

Věta 11 (Cayleyho formule). *Nechť K_n je úplný graf s vrcholy $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$. Potom pro počet koster $\kappa(K_n)$ grafu K_n platí*

$$\kappa(K_n) = n^{n-2}.$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení odvodíme z předchozí věty 10. Sestavme nejprve Laplaceovu matici L řádu n grafu K_n. Stupeň všech vrcholů úplného grafu K_n je $n-1$, všechny prvky na diagonále matice L jsou proto rovny číslu $n-1$. Protože v úplném grafu spojuje každé dva vrcholy právě jedna hrana, má matice L na všech pozicích mimo diagonálu číslo -1.

Dále sestrojme matici L_{nn} z matice L vyškrtnutím posledního řádku a posledního sloupce. Determinant matice L_{nn} řádu $n-1$ spočítáme vhodnými řádkovými a sloupcovými úpravami – nejprve od všech řádků kromě prvního odečteme první řádek a následně k prvnímu sloupci přičteme součet všech ostatních sloupců:

$$\det L_{nn} = \det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -n & n & 0 & \ldots & 0 \\ -n & 0 & n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Takto upravená matice řádu $n-1$ má všude pod diagonálou nuly, a její determinant je tedy roven součinu prvků na diagonále. Na diagonále je v prvním řádku prvek 1, ve všech zbylých $n-2$ řádcích najdeme na diagonále prvek n. Proto je $\kappa(K_n) = \det L_{nn} = n^{n-2}$.

□

Závěr

S výjimkou úvodní kapitoly jsme v každé z kapitol diplomové práce představili jeden typ matice s prvky -1, 1, 0. Vlastnosti těchto matic jsme ilustrovali na mnoha konkrétních příkladech. Zároveň jsme si ukázali, jak se tyto matice uplatní při řešení úloh z různých oblastí matematiky.

Témata jednotlivých kapitol se nám však v žádném případě nepodařilo zcela vyčerpat, ba naopak nám nechávají značný prostor pro další, hlubší studium. Matice sousednosti, se kterými jsme se seznámili ve druhé kapitole, bychom mohli uvést do kontextu tzv. *perfektních párování*. Věnovat bychom se mohli zejména dvěma výsledkům: zaprvé tomu, že nenulovost determinantu matice sousednosti implikuje existenci perfektního párování, a zadruhé tomu, že tzv. *permanent* matice sousednosti vyjadřuje počet perfektních párování grafu (viz např. monografii L. Lovásze a M. Plummera [10]).

Třetí kapitola, věnovaná Hadamardovým maticím, skýtá rovněž značný prostor pro rozšíření. Kromě toho, že bychom si mohli ukázat některé další způsoby konstrukce Hadamardových matic, bychom se mohli zaměřit na teorii samoopravných kódů, jak jsme již naznačili v úvodu této kapitoly (viz např. publikaci F. MacWilliamse a F. Sloana [11]). Dále bychom se mohli věnovat tzv. *Hadamard's maximum determinant problem* a odhalit, že právě Hadamardovy matice mají ze všech matic s prvky -1 a 1 největší absolutní hodnotu determinantu (viz článek J. Hadamarda [4]).

Incidenční matice systémů podmnožin, které jsme zkoumali ve čtvrté kapitole, bychom mohli představit ve světle blokových schémat a při té příležitosti dokázat *Fisherovu nerovnost* (viz např. spis S. Jukny [7]). Dále bychom se mohli věnovat příkladu s konečnými projektivními rovinami a ukázat si, jak souvisí s populární karetní hrou *Dobble*. Je skutečně možné, aby obsahovala 55 karet a 50 různých symbolů, jak je uvedeno na krabičce?

Incidenční matice, díky kterým jsme v páté kapitole počítali kostry grafů, bychom mohli využít také k dokazování některých tvrzení týkajících se prostorů kružnic grafů (viz např. monografii B. Bollobáse [2]).

V diplomové práci samozřejmě zdaleka nejsou popsány všechny třídy matic s prvky -1, 1, 0. Za všechny takové struktury jmenujme např. *permutační matice*, *binární* (též *booleovské* či *logické*) *matice*, *konferenční matice* nebo *Redhefferovy matice*.

Velkou výzvou při psaní této práce bylo vypořádat se s rozdílností české terminologie napříč literaturou – porovnejme například definici matice incidence v knize J. Matouška a J. Nešetřila [14] s definicí incidenční matice v učebnici V. Dlaba a J. Bečváře [3]. Při zavádění některých pojmů jsme museli spoléhat na vlastní překlad z anglického originálu.

Přestože tato práce propojuje několik různých oblastí matematiky, umožňuje vhled i těm čtenářům, kteří nemají hlubší teoretické zázemí v žádném z těchto oborů. Jeden z jejích přínosů tak tkví v tom, že pomocí leitmotivu jedniček a nul umožňuje náhled do nevšedních aplikací, aniž by se chytila do pasti komplexnosti, kterou trpí značná část existujících textů, které leckdy nemají dobře vytyčenou vodicí linii. Jejich obsah je natolik detailní, že čtenář, který není v dané problematice odborníkem, má problém se v množství informací zorientovat, a jeho pochopení problematiky je tak značně ztíženo.

Seznam použité literatury

[1] Bečvář, J. (2002). *Lineární Algebra.* Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-92-8.

[2] Bollobás, B. (1998). *Modern Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York. ISBN 0-387-98488-7.

[3] Dlab, V. a Bečvář, J. (2016). *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* Vlastním nákladem, Praha. ISBN 978-80-260-9838-6.

[4] Hadamard, J. (1893). Résolution d'une question relative aux déterminants. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, **17**, 240–246.

[5] Hoffman, A. J. a Wu, C. W. (2016). A Simple Proof of a Generalized Cauchy–Binet Theorem. *The American Mathematical Monthly*, **123**, 928–930.

[6] Horn, R. a Johnson, C. (2012). *Matrix Analysis.* Cambridge University Press. ISBN 9781139788885.

[7] Jukna, S. (2010). *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science.* Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer. ISBN 978-3-642-08559-8.

[8] Kharaghani, H. a Tayfeh-Rezaie, B. (2005). A Hadamard matrix of order 428. *Journal of Combinatorial Designs*, **13**, 435–440.

[9] Lampio, P. H. J. (2015). *Classification of difference matrices and complex Hadamard matrices.* Aalto University publication series Doctoral dissertations 177/2015. Helsinki. ISBN 978-952-60-6471-0.

[10] Lovász, L. a Plummer, M. (2009). *Matching Theory.* AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub. ISBN 9780821847596.

[11] MacWilliams, F. a Sloane, N. (1977). *The Theory of Error-correcting Codes.* Number pt. 2 in Mathematical Library. North-Holland Publishing Company. ISBN 9780444850102.

[12] Matoušek, J. (2006). Šestnáct miniatur: Matematické aplikace lineární algebry. URL `https://kam.mff.cuni.cz/~matousek/la-appls-2pp.ps`.

[13] Matoušek, J. (2010). *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra.* Student Mathematical Library. American Mathematical Society. ISBN 978-0821849774.

[14] Matoušek, J. a Nešetřil, J. (2007). *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Třetí, upravené a doplněné vydání. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-1411-3.

[15] Suárez Canedo, E. J. (2018). *Hadamard full properlinear codes of type Q. Rank and Kernel.* PhD thesis, Universitat Autònoma de Barcelona.

[16] Štěpánová, M. (2017). Sylvesterovy–Hadamardovy, Kravčukovy a Sylvesterovy–Kacovy matice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **62**, 81–101.

Seznam obrázků