Posudek oponenta na bakalářskou práci

# Vít Fojtík
# **Lower Bounds on Boolean Formula Size**

Práce poskytuje přehled výsledků v oblasti důkazů dolních odhadů složitosti Booleovských formulí v bázi $\{\wedge, \vee, \neg\}$. Logaritmus minimální velikosti formule je asymptoticky v lineárním vztahu k minimální hloubce obvodu a tedy k paralelnímu času výpočtu. Práce je především zaměřena na formální míry složitosti, které zobecňují Chrapčenkovu metodu [1]. Přehled výsledků je doplněn výpočty, které porovnávají některé z prezentovaných metod na příkladech. Kromě toho práce poskytuje přehled hlavních výsledků využívajících metodu náhodných restrikcí pro formule, které zobecňují a zesilují výsledek Subbotovské [2].

Práce je psána srozumitelně a s výjimkou Example 4 a Example 5 jsem nenašel podstatnější nejasnosti. Jedná se o obtížnou oblast, kde v poslední době nedošlo k významnějšímu pokroku v dosažených odhadech, přestože jde o oblast, která je intenzivně zkoumána a souvisí s dalšími oblastmi složitosti jako komunikační složitost, složitost obvodů a složitost protokolů konečných her.

V Example 4 na straně 21, řádky $-15$ až $-13$, je odhad $p_G \leq (2^{2k-1})^2$. Veličina $p_G$ je podle Definition 24 a Definition 25 rovna maximu $P_G(A, B)$ přes $A \subseteq f^{-1}(0)$ a $B \subseteq f^{-1}(1)$, kde $f$ je některá projekce $p_i$, ale z textu uvedeného v práci není zřejmé, jakým způsobem se toto maximum odhaduje.

V Example 5 na straně 22, řádek 10 je výpočet, který je chybný z následujícího důvodu. Označme $m = 2^{2k} - 2k - 1$ a $n = 2^k - 2$. Počet různých $n$-tic různých prvků z dané množiny velikosti $m$ je $\frac{m!}{(m-n)!}$, ale hodnota uvedená v práci je rovna $\frac{(2^{2k}-2k-1)!}{(2^k-2)!} = \frac{m!}{n!}$. Protože $m > 2n$, jsou tyto hodnoty různé.

Za nedostatek předložené práce považuji, že z výkladu měr obdélníků (rectangle measure) v Sekci 3 lze odvodit nerovnost $\kappa \leq D^*$, ale tato nerovnost není v práci uvedena a čtenář si ji musí odvodit z Theorem 24 a z Example 7. Nerovnost je přitom podstatná jako motivace pro studium $D^*$, protože $\kappa$ odpovídá Chrapčenkově míře $K$, což je jedna z hlavních měr, které jsou v práci prezentovány a která na příkladech uvedených v práci vychází lépe než další zkoumané míry. Kromě toho, nečíslovaná Remark za Theorem 24 je podstatné tvrzení, které dává do souvislosti konvexitu a silnou subaditivitu (strong subadditivity) a mělo by být pro přehlednost uvedeno ve významnější roli. Silně subaditivní míry jsou důležité proto, že na rozdíl od konvexních měr mohou nabývat větších než kvadratických hodnot.

Práce nevyužívá monografii [4], která obsahuje speciální kapitolu o formálních mírách včetně grafových a konvexních měr zkoumaných v předložené práci. Jde o dostupnou a známou monografii, proto považuji za překvapivé, že ji předložená práce nevyužívá nebo alespoň necituje jako zdroj dalších informací. Jeden z důsledků patrně je, že v sekci 4 je citován výsledek [2] z roku 1961, kde je dokázán odhad s exponentem 1.5, a výsledek [3] z roku 1993, kde je exponent 2, ale mezi těmito výsledky byly dva mezivýsledky jiných autorů s exponenty 1.55 a 1.63, které v předložené práci nejsou uvedeny. Tyto výsledky byly významné tím, že upozornily, že exponent 1.5 není maximální možný a v přehledové práci by měly být uvedeny. Exponent 2 je horní mez, tedy výsledek [3] implikuje přesnou hodnotu zkoumaného exponentu.

Chtěl bych uvést ještě některé méně významné připomínky. Například na straně 25, řádek 17, ve výrazu $\Lambda(S) = n$ označuje $n$ proměnnou pro indukci, ale v celém důkazu znamená $n$ dimenzi, tedy počet proměnných uvažovaných funkcí. Na straně 26, v Remark na řádku 4 je formulace "maximal on subset of measures", ale formulace se týká prvku dané množiny, tedy by bylo lepší napsat například "maximal measure in a subset of measures". U Theorem 29 není uvedeno, z jaké práce je převzata, i když z kontextu lze usoudit, že je převzata z [3].

Autor práce prokázal schopnost porozumět a srozumitelně prezentovat matematické metody ve zmíněné oblasti složitosti. Na druhé straně, na základě uvedených nedostatků navrhuji klasifikaci velmi dobře.

# Reference

[1] V. M. Khrapchenko. Method of determining lower bounds for the complexity of P-schemes. Mathematical Notes, 10(1):474-479, 1971.

[2] B. A. Subbotovskaya. Realization of linear functions by formulas using or, and, not. In Doklady Akademii Nauk, volume 136, pages 553-555. Russian Academy of Sciences, 1961.

[3] J. Hastad. The shrinkage exponent is 2. In Proceedings of 1993 IEEE 34th Annual Foundations of Computer Science, pages 114-123. IEEE, 1993.

[4] Stasys Jukna, Boolean Function Complexity: Advances and Frontiers, Springer Publishing Company, Inc, 2012.

Dne 7. 6. 2019, RNDr. Petr Savický, CSc, oponent.